



Application de l'homogénéité à la théorie des observateurs non linéaires

Tomas Menard

► To cite this version:

Tomas Menard. Application de l'homogénéité à la théorie des observateurs non linéaires. Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2011. Français. NNT: . tel-00633713

HAL Id: tel-00633713

<https://theses.hal.science/tel-00633713>

Submitted on 19 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATHÉMATIQUES

Année : 2011

Thèse de Doctorat de l'École Centrale de Nantes

Spécialité : AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE APPLIQUÉE

Présentée et soutenue publiquement par :

Tomas MÉNARD

le 26 septembre 2011

à l'École Centrale de Nantes

APPLICATION DE L'HOMOGENÉITÉ À LA THÉORIE DES OBSERVATEURS NON LINÉAIRES.

Jury

Rapporteurs :	Witold RESPONDEK	Professeur à l'INSA de Rouen
	Gildas BESANÇON	Professeur à l'INP de Grenoble
Examineurs :	Wilfrid PERRUQUETTI	Professeur à l'École Centrale de Lille
	Claude MOOG	Directeur de recherche au CNRS
	Emmanuel MOULAY	Chargé de recherche au CNRS
	Alessandro ASTOLFI	Professeur à l'Imperial College of London

Directeur de thèse : Claude MOOG

Co-encadrant : Emmanuel MOULAY

Laboratoire : Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE	3
NOTATIONS	9
CHAPITRE 1 — Observateurs non linéaires	11
1.1 Introduction	12
1.2 Définitions	12
1.2.1 Observabilité d'un système	12
1.2.2 Liens entre les différentes définitions d'observabilité	15
1.2.3 Observateurs	15
1.2.4 Systèmes équivalents	16
1.3 Synthèse d'observateurs	17
1.3.1 Observateurs linéaires	18
1.3.2 Transformation de systèmes non linéaires	19
1.3.3 Observateur de Kalman étendu	25
1.3.4 Observateur de Thau et à grand gain	26
1.3.5 Observateur backstepping	29
1.4 Conclusion	31
CHAPITRE 2 — Construction d'un observateur global en temps fini	33
2.1 Introduction	34
2.2 Stabilité en temps fini	34
2.2.1 Définition de la stabilité en temps fini	35
2.2.2 Homogénéité et temps fini	37
2.3 Observateurs en temps fini	38
2.3.1 Précédents observateurs en temps fini	38
2.3.2 Construction d'un observateur global à grand gain en temps fini	40

2.3.3	Exemples	56
2.4	Conclusion	61
CHAPITRE 3 — Construction d’une approximation homogène pour le problème de l’observabilité		67
3.1	Introduction	68
3.2	Approximation homogène pour le problème de la contrôlabilité	68
3.2.1	Ordre d’une fonction et d’un champ de vecteurs	69
3.2.2	Filtration, dilatation et changement de coordonnées	71
3.2.3	Propriété des nouvelles coordonnées	72
3.2.4	Construction et propriétés de l’approximation	75
3.3	Approximation homogène pour le problème de l’observabilité	77
3.3.1	Changement de coordonnées	77
3.3.2	Propriétés du système dans les nouvelles coordonnées	82
3.3.3	Construction de l’approximation pour l’observabilité	85
3.4	Exemples	87
3.4.1	Premier exemple	87
3.4.2	Deuxième exemple	89
3.5	Conclusion	92
CHAPITRE 4 — Construction d’un observateur local		93
4.1	Introduction	95
4.2	Construction d’un observateur local	95
4.2.1	Construction de l’observateur en utilisant l’approximation homogène	95
4.2.2	Construction d’un observateur en utilisant une approximation linéaire	102
4.3	Simulations	104
4.3.1	Premier exemple	106
4.3.2	Deuxième exemple	114
4.3.3	Troisième exemple	121
4.4	Conclusion	128
CONCLUSION ET PERSPECTIVES		129
ANNEXES		130
ANNEXE A — Rappels sur la stabilité		131
ANNEXE B — Rappels de géométrie différentielle		135
B.1	Définitions	135
B.2	Formules	136

ANNEXE C — Rappels sur l’homogénéité	139
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	141

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement Emmanuel Moulay, pour m'avoir permis de découvrir l'automatique, ainsi que Claude Moog pour avoir été directeur de ma thèse. Je tiens également à remercier Wilfrid Perruquetti, pour tous les échanges que nous avons pu avoir tout au long de ma thèse.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail, Gildas Besançon et Witold Respondek, rapporteurs de ma thèse ainsi qu'Alessandro Astolfi, examinateur.

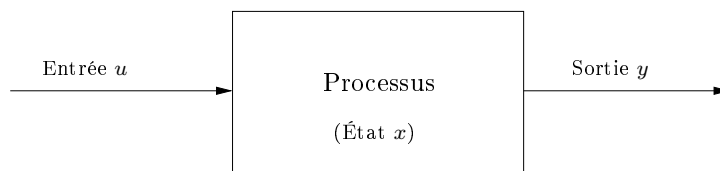
J'ai eu le plaisir de rencontrer de nombreuses personnes qui m'ont permis de passer ces trois ans dans la bonne humeur : Sébastien, Carlos, Dominique, Pedro, Loïc, Santiago, David, Céline, Ines, Aleksandra, Denis, Xavier, Andréa, Charbel, Karthick, Sylvain, Louis-Marie, Adrien, Nicolas, Raffik et tous les autres. Je remercie également mes colocataires, Nöelie et Renaud qui m'ont supportés pendant ma thèse.

Enfin, je ne remerciais jamais assez ma famille, qui m'a permis d'arriver là où j'en suis actuellement, ainsi que Jinda, qui m'a entouré de son amour durant ma dernière année de thèse.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

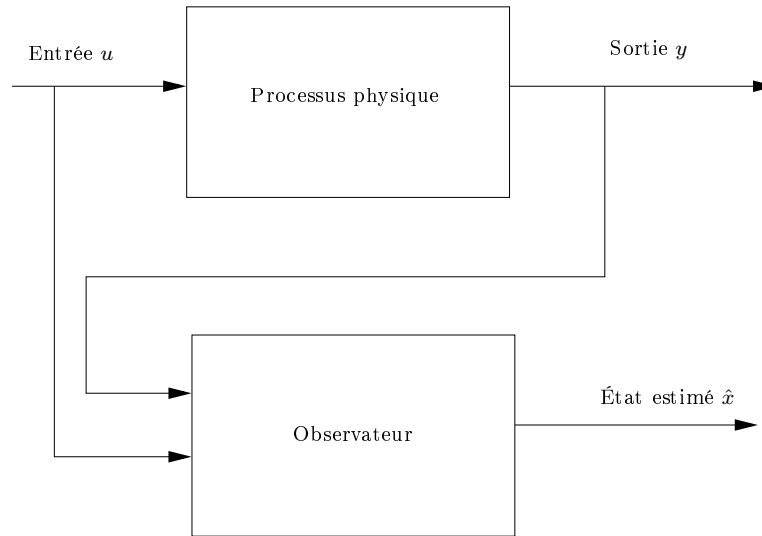
Motivation du travail de thèse

La théorie du contrôle s'est beaucoup développée au cours de ces dernières décennies. En effet, elle permet d'analyser et de résoudre les problèmes associés aux systèmes contrôlés, représentés par la figure suivante :



Pour ces systèmes, on peut agir sur le processus à l'aide de l'entrée que l'on notera u . Ce que l'on mesure du système, par exemple par un capteur, est donné par la sortie y . L'état interne du processus sera représenté par x . Cette représentation, standard en automatique, permet de modéliser de nombreux problèmes provenant de différents domaines applicatifs comme les communications [Tarbouriech *et al.* \(2005\)](#), l'électronique [Bose \(2006\)](#), la robotique [Bicchi *et al.* \(2003\)](#), plus récemment la biologie [Liu *et al.* \(2011\)](#), etc. Pour une grande partie de ces systèmes, le processus peut être représenté par une équation différentielle impliquant l'état x et l'entrée u ; la sortie est une fonction de l'entrée u et de l'état x . Dans ce mémoire, nous considérerons exclusivement des systèmes dont le processus est régi par une équation différentielle ordinaire.

Dans de nombreuses situations, on ne peut connaître entièrement l'état x . La sortie y n'en est en général qu'une partie. Il existe différentes raisons à cela. Par exemple, pour des raisons pratiques, il arrive que l'on ne puisse installer suffisamment de capteurs parce qu'ils sont trop volumineux ou trop onéreux pour une conception en série. Dans ce cas, une méthode alternative a été conçue. On reconstruit l'état x à l'aide d'un second processus virtuel qui prend en entrée ce que l'on connaît du système physique, c'est-à-dire, le modèle, l'entrée u et la sortie y . Ce processus donne en sortie l'état estimé \hat{x} et s'appelle un observateur. Il est représenté par la figure suivante :



En automatique, les principales raisons de vouloir construire un observateur sont la surveillance [Kazantsis *et al.* \(2000\)](#), la détection de défaillance [Hammouri *et al.* \(1999\)](#); [Franck *et al.* \(1999\)](#) et la commande [Teel et Praly \(1994\)](#); [Isidori \(1995\)](#). Plus récemment, il a été montré que les observateurs peuvent être utilisés pour la synchronisation de signaux chaotiques. Nous développons succinctement les principales raisons pour donner une idée plus précise au lecteur, cependant elles ne seront pas abordées dans la suite de ce mémoire.

La surveillance permet de fournir des indications pour un utilisateur externe, de la même façon qu'un capteur. C'est particulièrement utile quand l'utilisateur a une action directe sur le processus.

Dans l'industrie, les défaillances sont récurrentes et peuvent mener à des arrêts de productions, voire à des accidents. Il est donc nécessaire de détecter ces défaillances le plus tôt possible. Selon une méthode généralisée, basée sur la redondance analytique, on va comparer les données issues d'un capteur avec une autre source, par exemple le signal reconstruit par un observateur. Si la différence entre les deux sources dépasse un certain seuil, alors une alerte sera envoyée.

La commande est un problème fondamental en automatique. La question de la commande par retour d'état, c'est-à-dire lorsque tout l'état est disponible est un problème qui a été étudié depuis la création de l'automatique. De nombreux résultats ont été obtenus, même pour les systèmes non linéaires. Quand seulement une partie de l'état est disponible, alors on parlera de commande par retour de sortie. Dans le cas linéaire, le principe de séparation nous permet de concevoir séparément une commande par retour d'état avec un observateur, ce qui donne une commande par retour de sortie. Dans le cas non linéaire, le principe de séparation ne s'applique pas en général. Il faut alors chercher des solutions différentes pour chaque cas.

Comme nous pouvons le constater, les spécificités requises varient énormément en fonction du domaine d'application de l'observateur. C'est pourquoi au cours de ces trente

dernières années, une multitude de méthodologies ont été mises en place pour le problème de la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires. À ce jour, il n'existe aucune méthode générale permettant de synthétiser un observateur pour un système non linéaire quelconque, contrairement au cas linéaire.

Positionnement du travail de thèse

Comme nous l'avons spécifié, la recherche en théorie des observateurs est un domaine très actif, où il reste beaucoup de problèmes non résolus. En effet, selon le problème considéré, les spécificités requises pour l'observateur changent considérablement. Par exemple, pour la synchronisation de signaux chaotiques, on aura besoin d'un observateur très précis, stable en temps fini. Alors que pour le problème de la commande par retour de sortie, l'objectif est seulement d'obtenir la stabilité asymptotique du système bouclé. Parmi tous les outils utilisés, un s'est particulièrement développé au cours de ces vingt dernières années, c'est l'homogénéité. L'homogénéité est une généralisation de la notion de degré pour les polynômes, ce qui permet de définir des ordres adaptés aux spécificités de chaque problème. Au-delà de la synthèse d'observateurs, l'homogénéité est un outil utilisé pour la stabilité des systèmes différentiels. Cet outil est principalement utilisé pour deux applications.

La première application de l'homogénéité est la stabilité en temps fini. Le besoin de systèmes stables en temps fini est devenu de plus en plus important au cours de ces dernières années, car on a besoin d'un degré de précision de plus en plus élevé. Par exemple pour la synchronisation de systèmes chaotiques. Le principe d'un système chaotique est que deux conditions initiales différentes engendrent deux solutions au comportement totalement différent, donc si la précision n'est pas absolue, on ne peut pas être sûr de converger vers la solution désirée. Des conditions très simples ont été obtenues dans [Bhat et Bernstein \(1997, 2005\)](#) pour la stabilité en temps fini d'un système différentiel en utilisant l'homogénéité. Cette méthodologie a donc été appliquée avec succès au problème du retour de sortie et ensuite à la synthèse d'observateurs, dans [Qian et Li \(2005, 2006\)](#); [Andrieu *et al.* \(2008\)](#), mais le réglage des gains se fait ici avec un algorithme du type "backstepping", c'est-à-dire de manière récursive sur l'ordre du système. Une autre méthodologie pour le réglage des gains a été développée pour la synthèse d'observateurs. En s'appuyant sur un résultat de [Bhat et Bernstein \(2005\)](#) pour la commande en temps fini, la synthèse d'observateurs en temps fini a été réalisée avec succès dans [Perruquetti *et al.* \(2008\)](#); [Shen et Xia \(2008\)](#). L'intérêt de ces observateurs est que les gains sont les mêmes que dans le cas linéaire, donc connus et facilement calculables.

La deuxième application de l'homogénéité est la construction d'approximations. Généralement, les approximations sont construites en considérant le développement de Taylor du champ de vecteurs associé au système différentiel. Une approximation très simple est alors donnée en prenant seulement les termes linéaires : c'est la linéarisation. On peut considérer une approximation plus précise en prenant les termes suivants dans le développement de Taylor, par exemple les termes quadratiques, etc. L'homogénéité est

une généralisation de la notion de degré pour les polynômes, elle possède beaucoup plus de liberté. Ceci permet de construire des approximations spécialement adaptées au problème considéré, contrairement à la linéarisation. De nombreux travaux ont été effectués dans le cadre de la commandabilité. Cette méthodologie est issue de l'étude des opérateurs hypoelliptiques [Rothschild et Stein \(1976\)](#); [Goodman \(1976\)](#), et a été appliquée avec succès au problème de la commandabilité, dans [Bianchini et Stefani \(1990\)](#); [Hermes \(1991, 1986\)](#); [Stefani \(1985\)](#); [Sussmann \(1987\)](#). Cependant, à notre connaissance, cela n'a jamais été appliqué au problème de l'observabilité.

Organisation du mémoire

Dans ce mémoire, nous présentons nos travaux sur l'application de l'homogénéité pour la théorie des observateurs non linéaires. En particulier, nos travaux ont porté sur la synthèse d'observateurs en temps fini pour des systèmes non linéaires et sur la construction d'une approximation homogène pour le problème de l'observabilité.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré au rappel de la notion d'observabilité et d'observateur. Dans un premier temps, nous rappelons brièvement les différentes définitions d'observabilité pour les systèmes non linéaires, ainsi que la définition d'un observateur de manière générale. Dans un second temps, nous établissons un état de l'art, non exhaustif, des différentes méthodologies de synthèse d'observateurs pour les systèmes continus, en nous concentrant sur les systèmes uniformément observables ou remplissant la condition du rang.

Le chapitre 2 contient les travaux sur la synthèse d'observateurs en temps fini. Nous rappelons donc les définitions concernant la stabilité en temps fini pour les systèmes différentiels non linéaires, ainsi que les résultats antérieurs sur la synthèse d'observateurs en temps fini. Nous nous appuyons ensuite sur les méthodes existantes, *pour construire un observateur global en temps fini pour la classe des systèmes uniformément observables*, globalement Lipschitz et avec une entrée bornée, avec des gains fixes issus du cas linéaire. Ce résultat a fait l'objet d'une communication dans une conférence dans [Ménard et al. \(2009\)](#), ainsi que d'un article en revue dans [Ménard et al. \(2010\)](#).

Nous présentons dans le chapitre 3 les travaux sur la construction d'une approximation homogène pour le problème de l'observabilité. Nous rappelons d'abord les résultats existants sur la construction d'approximations homogènes pour des systèmes contrôlés. Ensuite, en nous basant sur la construction obtenue dans le cas de la commandabilité, nous proposons une méthode duale permettant de *construire une approximation homogène pour le problème de l'observabilité*. Ces travaux ont fait l'objet d'une communication en conférence dans [Ménard et al. \(2011\)](#).

La construction présentée au chapitre 3 est utilisée dans le chapitre 4 pour *la synthèse d'un observateur local*. Nous montrons que pour un système stable au sens de Lya-

Lyapunov, l'observateur conçu à l'aide de l'approximation homogène est localement convergent. Comme les systèmes considérés remplissent la condition du rang, nous construisons également un observateur à l'aide de la linéarisation du système. Nous comparons ensuite l'observateur conçu avec l'approximation homogène et l'observateur synthétisé à l'aide d'une approximation linéaire. Comme les deux observateurs sont localement convergents pour des systèmes stables, nous effectuons des simulations sur plusieurs exemples, en faisant varier la condition initiale du système observé, ainsi que le réglage du gain afin de comparer le domaine de validité de ces deux approches.

Les notions utilisées de manière récurrente dans ce mémoire, comme la stabilité, les fonctions de Lyapunov, les outils de géométrie différentielle et l'homogénéité sont rappelés dans l'annexe.

NOTATIONS

Notations

- \mathbb{R} : ensemble des réels.
- $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_{\geq 0}$: ensemble des réels positifs ou nuls.
- $\mathbb{R}_{>}$: ensemble des réels strictements positifs.
- \mathbb{R}_- : ensemble des réels négatifs ou nuls.
- \mathbb{N} : ensemble des entiers naturels.
- ∂R est la frontière de R , où $R \subset \mathbb{R}^n$
- $\|\cdot\|_{k,n}$: norme k sur \mathbb{R}^n .
- $\|\cdot\|_P$: norme associée à la matrice P , où P est une matrice symétrique définie positive.
- $\mathcal{B}_{\|\cdot\|}(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$.
- δ_{ij} : symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$, 0 sinon.
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$: algèbre des fonctions réelles analytiques sur \mathbb{R}^n .
- $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$: algèbre de Lie des champs de vecteurs analytiques sur \mathbb{R}^n .
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: algèbre non commutative des opérateurs différentiels analytiques sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.
- $\Omega(\mathbb{R}^n)$: espace des formes différentielles analytiques sur \mathbb{R}^n .
- $\Omega^1(\mathbb{R}^n)$: sous-espace de $\Omega(\mathbb{R}^n)$ composé des 1-formes sur \mathbb{R}^n .
- I_n : matrice identité de dimension n .
- 0_n : matrice carrée de dimension n telle que $(0_n)_{ij} = 0, \forall i, j = 1, \dots, n$.
- A^T : matrice transposée de A .
- $A \leq B$ si $x^T A x \leq x^T B x, \forall x \in \mathbb{R}^n$, où A, B sont deux matrices carrées, symétriques, définies positives et de dimension n .
- $A_c : (A_c)_{i,j} = \delta_{i,j-1}, i, j = 1, \dots, n$.
- $C_c = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \in \mathbb{R}^n$.
- $\|\alpha\|_r = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i, \alpha \in \mathbb{N}^n$ et $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$.
- $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \alpha \in \mathbb{N}^n$.
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \alpha \in \mathbb{N}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

CHAPITRE 1

OBSERVATEURS NON LINÉAIRES

Sommaire

1.1	Introduction	12
1.2	Définitions	12
1.2.1	Observabilité d'un système	12
1.2.2	Liens entre les différentes définitions d'observabilité	15
1.2.3	Observateurs	15
1.2.4	Systèmes équivalents	16
1.3	Synthèse d'observateurs	17
1.3.1	Observateurs linéaires	18
1.3.1.1	Observateur de Luenberger	18
1.3.1.2	Observateur de Kalman	18
1.3.2	Transformation de systèmes non linéaires	19
1.3.2.1	Linéarisation exacte	19
1.3.2.2	Immersion	21
1.3.2.3	Pseudo Linéarisation	23
1.3.2.4	Observateur de Kazantsis et Kravaris	24
1.3.3	Observateur de Kalman étendu	25
1.3.4	Observateur de Thau et à grand gain	26
1.3.4.1	Observateur de Thau	26
1.3.4.2	Observateur à grand gain	27
1.3.5	Observateur backstepping	29
1.4	Conclusion	31

1.1 Introduction

Le but de ce mémoire de thèse est de présenter quelques travaux sur la construction d'observateurs et d'approximations pour le problème de l'observabilité. Nous avons besoin de définir tout d'abord le cadre dans lequel se placent nos travaux. Ce chapitre présente donc la notion d'observabilité pour des systèmes non linéaires ainsi que les principales méthodologies qui permettent de construire des observateurs pour de larges classes de systèmes dans les cas qui nous intéressent. Ce chapitre est divisé en deux parties :

- La première partie contient les notions de base à propos de l'observabilité pour des systèmes généraux, ainsi que la notion d'observateur et de systèmes équivalents.
- La deuxième partie est consacrée aux principales techniques de synthèse d'observateurs linéaires et non linéaires.

Les notions mathématiques utiles sont définies dans l'annexe.

1.2 Définitions

Nous rappelons, dans cette section, la notion générale d'observabilité, les principales définitions d'observabilité qui ont été mises en place au fil des années, ainsi que les liens entre ces différentes définitions. Pour finir, nous rappelons ce qu'est un observateur.

1.2.1 Observabilité d'un système

Premièrement, nous nous intéressons à la notion d'observabilité. C'est-à-dire, peut on distinguer deux états différents en connaissant seulement l'entrée et la sortie.

Considérons le cas général :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), & x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (1.1)$$

avec f, h de classe C^1 , dans la suite, nous supposons f et h suffisamment différentiables. Les entrées, en tant que fonction du temps $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, appartiennent à un ensemble d'entrées, dites admissibles, de fonctions mesurables et bornées. On note alors $x_u(t)$ la solution du système (1.1) au temps t sous la condition initiale $x_u(0) = x_0$. Cette solution est définie sur un intervalle maximal, que l'on note $[0, T(u, x_0)[$.

Nous rappelons quelques définitions sur l'observabilité (pour plus de détails voir [Hermann et Krener \(1977\)](#); [Besançon \(2007\)](#)) :

Définition 1.1. 1. Deux conditions initiales $x_0 \neq \bar{x}_0$ sont dites indistinguables, si pour toute entrée admissible u , $h(\bar{x}_u(t)) = h(x_u(t))$, pour tout $t \in [0, T[$ où $T = \inf(T_{(u, x_0)}, T_{(u, \bar{x}_0)})$.

2. Si deux conditions initiales x et \bar{x} sont telles qu'il existe $u(\cdot)$ et $t \in [0, T[$, où $T = \inf(T_{(u, x_0)}, T_{(u, \bar{x}_0)})$, tels que :

$$h(x_u(t)) \neq h(\bar{x}_u(t))$$

on dit que $u(\cdot)$ distingue (x, \bar{x}) sur $[0, T[$.

3. Le système est dit observable si, pour tout couple de conditions initiales distinctes, il existe une entrée qui les rend distinguables.
4. Une entrée qui distingue tout couple de points distincts sur un intervalle $[0, T]$ est dite universelle sur $[0, T]$.

Dans le cas d'un système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \\ y = Cx, & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (1.2)$$

avec A, B, C des matrices réelles, de dimensions correspondantes, il existe un critère simple, appelé critère de Kalman, pour savoir si le système (1.2) est observable.

Théorème 1.1. *Kalman (1960)* Le système (1.2) est observable si et seulement si

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad (1.3)$$

Remarque 1.1. L'observabilité du système (1.2) ne dépend pas de l'entrée u . On dira donc que la paire (A, C) est observable si le critère (1.3) est vérifié.

Exemple 1.1. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \\ y = x_1 - x_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

alors

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

est de rang 2, donc le système (1.4) est observable. \diamond

L'observabilité telle que nous l'avons définie ici est globale, c'est-à-dire que les différents couples de conditions initiales peuvent être distingués partout sur l'ensemble de définition. En pratique, il peut être nécessaire de distinguer les conditions initiales localement ou indépendamment de l'entrée, c'est pourquoi nous donnons des définitions de l'observabilité plus spécifiques.

Définition 1.2. Le système (1.1) est dit :

- uniformément observable si toute entrée est universelle.
- faiblement observable s'il existe un voisinage \mathcal{U} de tout point x tel qu'il n'y ait pas d'états indistinguables de x dans tout \mathcal{U} .

- localement observable en x_0 si pour tout voisinage ouvert \mathcal{U} de x_0 , il n'existe pas d'état indistinguable de x_0 dans \mathcal{U} .
- localement observable si le système (1.1) est localement observable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
- faiblement localement observable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ s'il existe un ouvert \mathcal{U} contenant x_0 , tel que pour tout voisinage \mathcal{V} de x_0 contenu dans \mathcal{U} , il n'y ait pas d'états indistinguishables de x_0 dans \mathcal{V} .
- faiblement localement observable s'il existe un ouvert \mathcal{U} dense tel que tout $x_0 \in \mathcal{U}$ est localement faiblement observable.

Exemple 1.2. Il y a deux principaux problèmes qui se posent pour l'observabilité dans le cas non linéaire. Le premier problème est que l'observabilité n'est pas globale en général. Par exemple, le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, & x \in \mathbb{R} \\ y = \sin(x) \end{cases} \quad (1.6)$$

est localement observable à l'origine, mais n'est pas globalement observable, en effet, la sortie est périodique.

Le second problème qui se pose est l'influence de l'entrée sur l'observabilité, en effet, il peut y avoir des pertes d'observabilité selon les entrées. Par exemple, le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - u)x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1.7)$$

est observable si $u \neq 1$, mais dans le cas $u = 1$, ce système devient non observable. \diamond

Enfin, nous définissons l'observabilité au sens du rang qui est basé sur des outils de la géométrie différentielle, et qui ne dépend pas directement de la connaissance explicite des solutions du système étudié.

Définition 1.3. Notons \mathcal{O} le plus petit sous-espace fonctionnel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ contenant les composantes h_1, \dots, h_p de la sortie h et tel que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{O}$, on ait $\mathcal{L}_{f_u}\phi \in \mathcal{O}$ (\mathcal{L}_{f_u} désigne la dérivée de Lie, le long des solutions de $\dot{x} = f_u(x)$, voir annexe). Le sous espace \mathcal{O} est appelé espace d'observabilité du système (1.1).

Définition 1.4 (Observabilité au sens du rang). Le système (1.1) est dit observable au sens du rang en un point x si la dimension de $d\mathcal{O}(x)$ est n .

Exemple 1.3. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_1^2 \\ y = h(x) = x_1 \end{cases} \quad (1.8)$$

Notons f le champ de vecteurs associé au système (1.8), alors $dh(x) = dx_1$ et $d\mathcal{L}_f h(x) = dx_2 + 2x_1 dx_1$. Ce qui donne, à l'origine :

$$\begin{aligned} dh(0) &= dx_1 \\ d\mathcal{L}_f h(0) &= dx_2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

donc le système (1.8) est observable au sens du rang à l'origine. \diamond

1.2.2 Liens entre les différentes définitions d'observabilité

Les différentes formes d'observabilité ne sont pas indépendantes. En effet, nous avons les résultats suivants.

Proposition 1.1. *Hermann et Krener (1977)*

$$\begin{array}{ccc} \text{localement observable} & \Rightarrow & \text{observable} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{faiblement localement observable} & \Rightarrow & \text{faiblement observable} \end{array}$$

Théorème 1.2. *Hermann et Krener (1977)* Si le système (1.1) est observable au sens du rang en un point x , alors il est faiblement localement observable en x .

Remarque 1.2. L'observabilité n'entraîne pas l'observabilité au sens du rang.

Exemple 1.4. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ y = x^3 \end{cases}$$

Ce système est observable à l'origine, en effet, on peut déduire x de la sortie y . Cependant, ce système n'est pas observable au sens du rang à l'origine, en effet, $h(x) = x^3$ et $f_u = 0$ donc $\mathcal{O} = \{cx^3, c \in \mathbb{R}\}$ et $d\mathcal{O} = \{3cx^2 dx, c \in \mathbb{R}\}$ entraîne que $d\mathcal{O}(0) = \{0\}$. \diamond

Même si l'observabilité faible locale en un point n'entraîne pas l'observabilité au sens du rang en ce point, nous avons cependant une contrepartie partielle.

Théorème 1.3. *Hermann et Krener (1977)* Si le système (1.1) est localement faiblement observable, alors il est observable au sens du rang presque partout (c'est-à-dire en dehors d'un ensemble de mesure nulle).

1.2.3 Observateurs

Nous avons vu la définition d'observabilité, qui signifie que les états sont distinguables en connaissant l'entrée et la sortie du système. Cependant, le fait de savoir que deux états sont distinguables ne permet pas de retrouver l'état directement en connaissant seulement l'entrée et la sortie. C'est pour cela que nous avons besoin d'une procédure systématique de reconstruction de l'état. Une procédure, que l'on appelle un observateur, consiste à définir un système auxiliaire qui prend en compte l'entrée et la sortie du système et qui donne une estimation de l'état.

Définition 1.5. On appelle observateur asymptotique d'un système dynamique :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases}$$

un système dynamique auxiliaire \mathcal{S}_{aux} dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer et dont le vecteur de sortie \hat{x} est l'état estimé :

$$\mathcal{S}_{aux} : \begin{cases} \dot{z} = \hat{f}(z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) = \hat{h}(z(t), u(t), y(t)) \end{cases} \quad (1.10)$$

tel que : $\|e(t)\| = \|\hat{x}(t) - x(t)\|$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

Définition 1.6 (Observateur exponentiel). Un observateur est dit exponentiel, si l'erreur $\|e(t)\|$ tend exponentiellement vers 0, c'est-à-dire si il existe deux constantes $\sigma, \beta > 0$, telles que :

$$\|e(t)\| \leq \sigma e^{-\beta t}.$$

1.2.4 Systèmes équivalents

Nous allons voir ici qu'un observateur est compatible avec un changement de variables.

Définition 1.7 (Systèmes équivalents). Un système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) = f_u(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$, est dit être équivalent au système :

$$\begin{cases} \dot{z} = F(z, u) = F_u(z) \\ y = H(z) \end{cases}$$

s'il existe un difféomorphisme $z = \phi(x)$ défini sur \mathbb{R}^n tel que pour tout $u \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} f_u(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} &= F_u(z) \\ h \circ \phi^{-1} &= H \end{aligned}$$

Proposition 1.2. *Besançon (2007)* Soit deux systèmes définis respectivement par :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.11)$$

et

$$\begin{cases} \dot{z} = Z(z, u) \\ y = H(z) \end{cases} \quad (1.12)$$

équivalents par le changement de coordonnées $z = \phi(x)$. Si le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = Z(\hat{z}, u) + k(\omega, H(\hat{z}) - y) \\ \dot{\omega} = F(\omega, u, y) \end{cases} \quad (1.13)$$

est un observateur pour (1.12), alors le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = X(\hat{x}, u) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{|\hat{x}}^{-1} k(\omega, h(\hat{x}) - y) \\ \dot{\omega} = F(\omega, u, y) \end{cases} \quad (1.14)$$

est un observateur pour (1.11).

Ce résultat montre l'intérêt des formes canoniques. Si on peut construire un observateur pour un système, alors on pourra construire un observateur pour toute la classe des systèmes équivalents par changement de coordonnées.

1.3 Synthèse d'observateurs

Nous présentons ici les principales façons de synthétiser un observateur. Nous rappelons tout d'abord la construction d'observateurs pour des systèmes linéaires. Pour le cas d'un système non linéaire, la synthèse d'un observateur n'est pas systématique. Il n'y a pas de méthode générale pour construire un observateur pour les systèmes non linéaires mêmes observables. Les approches développées jusqu'à présent sont pour la plupart des extensions des algorithmes linéaires. Cependant, il existe quelques méthodes spécifiquement non linéaires. La recherche sur la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires a été beaucoup développée au cours de ces trente dernières années. Nous présentons ici, de manière non exhaustive, les principales méthodologies pour la construction d'observateurs pour des systèmes continus non linéaires. Nous nous concentrerons sur les systèmes uniformément observables ou remplissant la condition du rang.

- *Systèmes linéaires* : il existe deux principaux observateurs pour les systèmes linéaires. L'observateur de Luenberger pour les systèmes linéaires invariants dans le temps et l'observateur de Kalman pour les systèmes linéaires variants dans le temps.
- *Transformation de systèmes non linéaires* : le principe de cette méthode est d'appliquer la proposition 1.2, c'est-à-dire de caractériser les classes de systèmes qui sont équivalents à des systèmes pour lesquels la construction d'un observateur est possible.
- *Observateur de Kalman étendu* : l'observateur est construit ici en prenant les gains correspondant à la partie linéaire du système par un développement de Taylor étendu (c'est-à-dire le long des solutions).
- *Observateur de Thau et à grand gain* : on considère des systèmes avec une partie linéaire observable et une partie non linéaire supposée Lipschitz. Si on peut construire un observateur pour la partie linéaire avec un gain assez important, alors la convergence de l'observateur peut être assurée.

- *Observateur backstepping* : un observateur est construit pour des classes de systèmes triangulaires en utilisant un algorithme récursif.

1.3.1 Observateurs linéaires

Il existe deux principaux types d'observateurs pour les systèmes linéaires. L'observateur de Luenberger est utilisé pour observer des systèmes linéaires déterministes invariants dans le temps. L'observateur de Kalman initialement connu sous le nom de filtre de Kalman a été conçu pour des systèmes stochastiques linéaires variants dans le temps, mais nous rappelons ici seulement le cas déterministe pour les systèmes linéaires variants dans le temps.

1.3.1.1 Observateur de Luenberger

Considérons le cas d'un système linéaire invariant dans le temps :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y(t) = Cx(t), & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (1.15)$$

Pour cette classe de systèmes, il existe le résultat suivant :

Théorème 1.4. *Luenberger (1964) Si le système (1.15) satisfait le critère de Kalman (1.3), alors il existe un observateur de la forme :*

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - K(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (1.16)$$

avec K une matrice de dimension $n \times p$, telle que $A - KC$ soit de Hurwitz.

Remarque 1.3. *La vitesse de convergence peut être choisie arbitrairement en choisissant un vecteur de gains K approprié.*

1.3.1.2 Observateur de Kalman

Considérons maintenant un système linéaire variant dans le temps :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y(t) = C(t)x(t), & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (1.17)$$

avec $A(t)$ et $C(t)$ uniformément bornées. Pour cette classe de systèmes, l'observateur de Kalman a été proposé dans Kalman et Bucy (1961).

Théorème 1.5. *Si le système (1.17) est uniformément observable, alors il existe un observateur de la forme :*

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) - K(t)(C(t)\hat{x}(t) - y(t)) \quad (1.18)$$

où $K(t)$ vérifie l'équation :

$$\dot{M}(t) = A(t)M(t) + M(t)A^T(t) - M(t)C^T(t)W^{-1}C(t)M(t) + V + \delta M(t) \quad (1.19)$$

$$M(0) = M_0 = M_0^T > 0, \quad W = W^T > 0 \quad (1.20)$$

$$K(t) = M(t)C^T(t)W^{-1} \quad (1.21)$$

avec $\delta > 2\|A(t)\|$ pour tout $t > 0$ ou $V = V^T > 0$.

Remarque 1.4. La vitesse de convergence peut être choisie arbitrairement en modifiant δ ou V .

1.3.2 Transformation de systèmes non linéaires

La transformation de systèmes non linéaires a fait l'objet de nombreuses recherches. En effet, la construction d'un observateur pour un système non linéaire n'est pas automatique, une idée est donc de transformer le système sous une forme où la construction d'un observateur est possible et d'appliquer la proposition 1.2. Nous allons donc voir quatre transformations différentes. Premièrement, nous considérons les transformations par difféomorphisme qui transforment le système en un système linéaire : cette méthodologie s'appelle la linéarisation exacte, cette méthodologie est très contraignante sur les hypothèses concernant les systèmes considérés. Ensuite, nous verrons une généralisation de cette méthode pour transformer un système non linéaire en un système linéaire, mais en considérant des changements de coordonnées qui ne sont pas des difféomorphismes : c'est l'immersion. Ces méthodes ne s'appliquant qu'à des classes de systèmes restreintes, une généralisation possible est de ne pas demander au système après transformation d'être linéaire : c'est la pseudo-linéarisation. Finalement, nous verrons une transformation pour changer le système sous forme linéaire en l'état et non linéaire par rapport à la sortie, mais avec des conditions supplémentaires sur la matrice d'état : cette méthode a été développée par Kazantsis et Kravaris.

1.3.2.1 Linéarisation exacte

Cette approche a été développée indépendamment dans [Krener et Isidori \(1983\)](#) et [Bestle et Zeitz \(1983\)](#). Ces deux travaux proposent des conditions pour l'existence d'un difféomorphisme qui linéarise le système, c'est le problème dual de la linéarisation par difféomorphisme et retour d'état pour la commande. Plus particulièrement, dans [Krener et Isidori \(1983\)](#), on considère un système autonome de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.22)$$

Le problème est de savoir s'il existe un changement de coordonnées non linéaire $z = \Phi(x)$, qui transforme le système (1.22) en un système linéaire sous forme canonique observable :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_c z + \phi(y) \\ y = C_c z \end{cases} \quad (1.23)$$

où A_c et C_c sont sous la forme duale de Brunovsky :

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C_c = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (1.24)$$

Pour le système (1.23), on peut facilement construire un observateur de type Luenberger de la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A_c \hat{x} + \phi(y) + K(y - C_c z) \quad (1.25)$$

Dans Krener et Isidori (1983), des conditions nécessaires et suffisantes sont données pour l'existence d'un tel changement de coordonnées Φ en utilisant des algèbres de Lie.

Théorème 1.6. *Krener et Isidori (1983) Il existe un changement de coordonnées qui transforme le système non linéaire (1.22) localement autour de x_0 en le système linéaire (1.23) si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites dans un voisinage \mathcal{V} de x_0 :*

1. $\text{rang}(dh(x), \dots, d\mathcal{L}_f^{n-1}h(x)) = n, \quad \forall x \in \mathcal{V}$
2. Le champ de vecteurs $\omega(x)$ défini sur \mathcal{V} par :

$$\mathcal{L}_\omega \mathcal{L}_f^k = \begin{cases} 1, & 0 \leq k < n-1, \\ 0, & k = n-1 \end{cases} \quad (1.26)$$

satisfait

$$[\omega, \text{ad}^k(f)\omega] = 0, \quad k = 1, 3, \dots, 2n-3 \quad (1.27)$$

Ce résultat à été étendu dans Krener et Respondek (1985); Xia et Gao (1988); Hou et Pugh (1999) au cas multi-sortie. Le résultat de Bestle et Zeitz (1983) est, lui, développé dans Li et Tao (1986) avec des conditions nécessaires et suffisantes. La faisabilité de ces méthodes, en particulier sur les calculs à effectuer, est étudiée dans Phelps (1991) et montre que pour des ordres élevés, le problème des calculs et de la résolution d'équations rend la synthèse de la transformation très difficile.

Le problème de la linéarisation pour des systèmes avec entrée a été ensuite étudié dans Keller (1987) et Xia et Gao (1989). Le but est de mettre le système sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_c z + \phi(y, u, \dot{u}, \dots, u^{(n)}) \\ y = C_c z \end{cases} \quad (1.28)$$

L'inconvénient de cette approche est l'apparition de dérivées d'entrées. Le problème de la réduction de l'ordre des dérivées de sortie a été étudié dans Proychev et Mishkov (1993). Le principal défaut de cette méthode est qu'elle ne s'applique qu'à peu de systèmes.

Afin de généraliser cette méthode, la caractérisation d'autres classes de systèmes a été développée : les systèmes affines en l'état, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u)x + \phi(u, y) \\ y = C_c x \end{cases} \quad (1.29)$$

La caractérisation des systèmes pouvant se mettre sous cette forme a été exposée dans Hammouri et Gauthier (1992); Hammouri et Kinnaert (1996); Glumineau *et al.* (1996); Plestan et Glumineau (1997).

Le problème de changement de coordonnées dépendant de l'échelle de temps a été développé dans Guay (2002); Respondek *et al.* (2004).

Les systèmes se mettant sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u, y)x + \phi(u, y) \\ y = C_c y \end{cases} \quad (1.30)$$

ont été caractérisés dans Souleiman *et al.* (2003) pour les systèmes mono-sortie, et dans Souleiman et Glumineau (2007) pour les systèmes multi-sortie. On appelle aussi cette méthode linéarisation par injection d'entrée-sortie.

1.3.2.2 Immersion

Une façon de réduire les conditions restrictives de la linéarisation exacte est de considérer des immersions au lieu de difféomorphismes. En effet, on définit une immersion de la façon suivante :

Définition 1.8. *Ticlea (2006) Considérons deux systèmes :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (1.31)$$

et

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{f}(z, u), & z \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, u \in \mathbb{R}^m \\ \bar{y} = \bar{h}(z), & \bar{y} \in \mathbb{R}^{\bar{p}} \end{cases} \quad (1.32)$$

tels que toute fonction d'entrée qui est admissible pour (1.31) est également admissible pour (1.32). Le système (1.31) est immergeable dans le système (1.32) si il existe une application de classe C^∞ , $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{n}}$ telle que :

- (i) Pour toute paire $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}}$, $h(x_0) \neq h(x_1)$ implique $\bar{h}(\tau(x_0)) \neq \bar{h}(\tau(x_1))$;
- (ii) Pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et toute fonction $u : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^m$ mesurable et bornée, le domaine de définition de $\bar{y}_{\tau(x_0), u}$ inclut le domaine de définition de $y_{x_0, u}$ et sur l'intersection de ces deux domaines, $y_{x_0, u}$ et $\bar{y}_{\tau(x_0), u}$ coïncident.

Dans cette situation, l'application τ est une immersion de systèmes.

Ce problème a été tout d'abord étudié dans [Fliess et Kupka \(1983\)](#) pour l'immersion en système bilinéaire où le problème de l'immersion d'un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + ug(x), & x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (1.33)$$

en le système :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + u\phi(y), \\ y = Cz \end{cases} \quad (1.34)$$

a été considéré.

Le cas local et le cas global ont été étudiés dans [Lévine et Marino \(1986\)](#) et [Bossane et al. \(1989\)](#). En effet, on a le résultat suivant :

Théorème 1.7. [Bossane et al. \(1989\)](#) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si

1. $\dim_{\mathbb{R}} (\mathcal{O}_{|(1.33)}) = n$
2. $\forall \omega \in \mathcal{O}_{|(1.33)}, \quad d(\mathcal{L}_g \omega) \wedge dh_1 \wedge \dots \wedge dh_p = 0$

où $\mathcal{O}_{|(1.33)}$ est le plus petit sous espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui contient les fonctions h_1, \dots, h_p et qui est stable par dérivée de Lie le long de f , alors il existe une immersion du système (1.33) en le système (1.34) localement autour de x_0 .

L'immersion d'un système non contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.35)$$

sous la forme d'un système linéaire à injection de sortie près :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_c z + \gamma(y) \\ y = C_c z \end{cases} \quad (1.36)$$

a été étudiée dans [Jouan \(2003\)](#) et [Noh et al. \(2004\)](#) selon deux approches différentes. Dans le premier, les fonctions de sortie sont dérivées jusqu'à ce qu'elles satisfassent une équation différentielle de forme spécifique. Dans le second, la sortie est intégrée plusieurs fois et le dernier signal est défini comme l'entrée du système augmenté. Ces résultats ont été généralisés dans [Back et al. \(2006\)](#) et [Besançon et Ticlea \(2007\)](#). Dans [Besançon et Ticlea \(2007\)](#), on considère l'immersion des systèmes affines en le contrôle sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} = A(u, y)z + B(u, z) \\ y = C(u)z + D(u) \end{cases} \quad (1.37)$$

Le problème de l'immersion pour des systèmes homogènes de degré 0 a également été étudié dans [Menini et Tornambe \(2008\)](#).

1.3.2.3 Pseudo Linéarisation

Le problème de la linéarisation exacte requiert des conditions trop restrictives, et cette méthode ne peut donc être appliquée que pour des classes de systèmes restreintes. Une autre façon de relaxer les hypothèses est de considérer une linéarisation approchée au lieu d'une linéarisation exacte. Le premier résultat pour des systèmes généraux sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.38)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$, a été obtenu dans [Zeitz \(1987\)](#). Le système est d'abord transformé sous forme canonique :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_c z + a(y, u, \dot{u}, \dots, u^{(n)}) \\ y = h(x_1, u) \end{cases} \quad (1.39)$$

puis un observateur linéaire est construit en linéarisant à la fois la fonction a et la fonction de sortie h par rapport à x_1 . Cette approche a été étendue au cas multi-sortie dans [Birk et Zeitz \(1988\)](#). Dans [Nicosia et al. \(1989, 1986\)](#) un changement de variables qui transforme le système (1.38) en un système sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_c z + \phi(y, \dot{y}, u) + O_z^2, \\ y = C_c z \end{cases} \quad (1.40)$$

où O_z^2 correspond aux termes d'ordre 2 et plus par rapport au point de fonctionnement. Dans [Lynch et Bortoff \(1997\)](#), la transformation est réalisée afin de minimiser les termes non linéaires. L'extension pour des systèmes multi-sortie affines en l'entrée est développée dans [Lynch et Bortoff \(2001\)](#). Un résultat similaire pour des systèmes avec entrée est donné dans [Nam \(1997\)](#), utilisant des outils algébriques. Une approche basée sur l'utilisation des observateurs pour des systèmes à entrée inconnue est réalisée dans [Ding et al. \(1990\)](#). Si on considère un système sous forme normale d'observabilité étendue, des conditions nécessaires et suffisantes sont données pour transformer un système sans entrée :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.41)$$

en un système sous la forme

$$\begin{cases} \dot{z} = A_c z + \gamma(y) + db(z) \\ y = C_c z \end{cases} \quad (1.42)$$

où d est un réel et b un vecteur vérifiant la condition suivante :

$$\det \begin{pmatrix} s & 0 & b_1 \\ -1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & s & b_{n-1} \\ 0 & & -1 & b_n \end{pmatrix} \neq 0, \quad (1.43)$$

pour tout s avec $Re(s) \geq 0$. On peut alors appliquer la théorie des observateurs à entrée inconnue pour les systèmes sous cette forme.

1.3.2.4 Observateur de Kazantzis et Kravaris

Les approches précédentes permettent de résoudre le problème de la construction d'un observateur si le système considéré remplit certaines conditions, mais les approches par linéarisation ou pseudo-linéarisation ont le même défaut, dans tous les cas, la sortie est linéarisée, ce qui donne des conditions restrictives. Ainsi, une approche différente a été développée dans [Kazantzis et Kravaris \(1998\)](#), qui ne requiert pas de linéariser la sortie. On considère un système sans entrée :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) = Fx + \bar{f}(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ y = h(x) = Hx + \bar{h}(x), & y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.44)$$

où $\bar{f}(x) = o(x)$ et $\bar{h}(x) = o(x)$. Le principe est de trouver une matrice B de dimension $n \times p$ et une matrice T de dimension $n \times n$ telles que la matrice :

$$A = (TF - BH)T^{-1} \quad (1.45)$$

soit de Hurwitz et telle que les valeurs propres de A soient différentes de celles de F . On cherche alors une solution réelle analytique de l'équation aux dérivées partielles de Kazantzis et Kravaris :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x)f(x) = A\theta(x) + \beta(h(x)) \quad (1.46)$$

où $\beta : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est analytique, et :

$$\frac{\partial \beta}{\partial y}(y) = B \quad (1.47)$$

Si θ satisfait cette équation aux dérivées partielles, alors :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0) = T \quad (1.48)$$

et θ est un difféomorphisme local. Si on définit le changement de coordonnées $z = \theta(x)$, alors :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \beta(y) \\ y = h(\theta^{-1}(z)) \end{cases} \quad (1.49)$$

et on peut construire un observateur de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \beta(y) \\ \hat{x} = \theta^{-1}(\hat{z}) \end{cases} \quad (1.50)$$

Dans [Kazantzis et Kravaris \(1998\)](#), des conditions suffisantes pour la solvabilité de l'équation aux dérivées partielles (1.46) ont été données. Cette méthode a été étendue pour des

systèmes non linéairement observables dans Krener et Xiao (2002). Une caractérisation plus complète de ces systèmes avec des conditions plus générales a été développée dans Andrieu et Praly (2006). Kreisselmeier et Engel ont proposé une approche en apparence différente dans Kreisselmeier et Engel (2003), le principe étant de transformer le système (1.44) en un système similaire à (1.49) mais en utilisant les intégrales successives de la sortie. Il a été montré dans Krener et Xiao (2006) que cette approche ainsi que celle de Kazantsis et Kravaris sont très proches. Le résultat présenté dans Kreisselmeier et Engel (2003) a été étendu dans Engel (2007) pour les systèmes avec entrée et dans Engel et Kreisselmeier (2007) pour construire un contrôleur par retour de sortie.

1.3.3 Observateur de Kalman étendu

L'idée la plus directe pour construire un observateur localement est d'appliquer les outils développés pour les classes de systèmes linéaires sur le système non linéaire. Nous allons donc rappeler ici l'observateur de Kalman étendu qui consiste à prendre un observateur de Kalman en calculant le gain du système correspondant à la partie linéaire du développement de Taylor étendu.

L'observateur de Kalman s'applique aux systèmes linéaires variants dans le temps, une façon d'étendre cet observateur à un système non linéaire général :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y = h(x(t)) \end{cases} \quad (1.51)$$

est de considérer la linéarisation de Taylor étendue, le long de la trajectoire estimée. C'est-à-dire que l'on considère un observateur de la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) - K(t)(h(\hat{x}(t)) - y(t)) \quad (1.52)$$

où le gain $K(t)$ correspond au gain de l'observateur de Kalman du système linéaire variant dans le temps :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \quad (1.53)$$

avec $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), u(t))$ et $C(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}(t))$ qui satisfont la condition d'observabilité du rang. Le gain $K(t)$ vérifie l'équation de Riccati suivante :

$$\dot{M}(t) = A(t)M(t) + M(t)A(t) - M(t)C^T(t)W^{-1}C(t)M(t) + V + \delta M(t) \quad (1.54)$$

$$M(0) = M_0 = M_0^T, \quad W = W^T > 0 \quad (1.55)$$

$$K(t) = M(t)C^T(t)W^{-1} \quad (1.56)$$

avec $\delta > 2\|A(t)\|$ pour tout t ou $V = V^T > 0$. Cet observateur est simple à mettre en oeuvre, car on applique le cas linéaire qui est déjà connu. Mais il est très difficile de prouver la convergence de cet observateur dans le cas général. On peut trouver des conditions suffisantes dans Baras *et al.* (1988); Reif *et al.* (1998); Krener (2003).

1.3.4 Observateur de Thau et à grand gain

Une autre méthodologie basée aussi sur le cas linéaire, mais ne s'appliquant qu'à des systèmes sous forme particulière sont l'observateur développé dans [Thau \(1973\)](#) et l'observateur à grand gain. On suppose que le système s'écrit comme la somme d'une partie linéaire observable et d'une partie non linéaire (en général supposée Lipschitz). La convergence est assurée si le gain associé à la partie linéaire est assez grand. La principale différence entre l'observateur développé par Thau et l'observateur à grand gain est que sous des hypothèses similaires, il n'y a pas de construction systématique pour l'observateur de Thau, contrairement à l'observateur à grand gain. Mais l'observateur à grand gain ne s'applique qu'à des classes de systèmes plus restreintes : la classe des systèmes uniformément observables.

1.3.4.1 Observateur de Thau

Les systèmes considérés sont supposés avoir une partie linéaire observable et une partie non linéaire en $o(x)$, i.e. :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, u), & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = Cx, & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (1.57)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et $f(u, x) = o(x)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$. La paire (A, C) est supposée observable. Le principe est de construire un observateur pour la partie linéaire et de montrer que la convergence s'étend au système avec la partie non linéaire sous certaines conditions. Comme la paire (A, C) est observable, on peut trouver une matrice de gains $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ telle que $(A - KC)$ soit de Hurwitz. L'observateur est de la forme :

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + f(\hat{x}, u) + Ky \quad (1.58)$$

L'erreur $e = \hat{x} - x$ vérifie donc l'équation différentielle suivante :

$$\dot{e} = (A - KC)e + f(x, u) - f(\hat{x}, u) \quad (1.59)$$

Comme la matrice $A - KC$ est de Hurwitz, pour toute matrice symétrique définie positive $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on peut résoudre l'équation de Lyapunov :

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) = -Q \quad (1.60)$$

où la solution P est une matrice symétrique définie positive.

La fonction f est supposée localement Lipschitz de constante l dans un voisinage \mathcal{V} de l'origine, i.e. :

$$\|f(x) - f(\hat{x})\| \leq l \|x - \hat{x}\|, \quad \forall x, \hat{x} \in \mathcal{V} \quad (1.61)$$

En considérant la fonction de Lyapunov $V(e) = e^T P e$, une condition suffisante pour la convergence de l'observateur (1.58) est donnée dans [Thau \(1973\)](#) :

le système (1.59) est asymptotiquement stable si :

$$\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} > l \quad (1.62)$$

Ce résultat permet seulement de vérifier que l'observateur est convergent après avoir calculé la matrice de gains K , ce qui n'est pas très intéressant en pratique. Un algorithme pour calculer la matrice de gains K est donné dans [Raghavan et Hedrick \(1994\)](#). Il est basé sur la résolution d'une équation de Riccati avec un paramètre qui dépend de la constante de Lipschitz l . Mais cet algorithme ne fonctionne pas pour toute paire observable (A, C) . Un autre algorithme pour la construction d'une matrice de gains K a été proposé dans [Rajamani \(1998\)](#). Cet algorithme est basé sur les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A - KC$, où les valeurs propres doivent être suffisamment négatives et les vecteurs propres doivent être suffisamment bien conditionnés pour assurer la stabilité. Dans [Tsinias \(1989\)](#), les systèmes considérés sont de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.63)$$

et l'observateur proposé est de la forme :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + K(u)(y - C\hat{x}) \quad (1.64)$$

avec une matrice de gain qui dépend de l'entrée u . Ce résultat est étendu dans [Tsinias \(1990\)](#) avec une matrice de gain $K(\hat{x}, u)$ qui dépend à la fois de l'estimation \hat{x} et de l'entrée u .

1.3.4.2 Observateur à grand gain

La construction d'un observateur à grand gain s'applique à une classe de systèmes spécifique, les systèmes uniformément observables, c'est-à-dire que toutes les entrées sont universelles. Il a été montré dans [Gauthier et Bornard \(1981\)](#) que les systèmes mono-entrée mono-sortie qui sont uniformément observables peuvent se transformer localement en une forme canonique. Plus précisément, considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.65)$$

et supposons que l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} h(x) \\ \mathcal{L}_f h(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.66)$$

soit un difféomorphisme local. Alors, dans les nouvelles coordonnées définies par $z = \Phi(x)$, le système (1.65) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c x + \phi(x) + G(x)u \\ y = C_c x = x_1 \end{cases} \quad (1.67)$$

avec $\phi(x) = [0, \dots, 0, \phi_n(x)]^T$, $G(x) = [G_1(x_1), G_2(x_1, x_2), \dots, G_n(x)]^T$ et :

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

Les fonctions ϕ_n et G_i , $i = 1, \dots, n$, sont supposées globalement Lipschitz sur \mathbb{R}^n . L'observateur proposé dans [Gauthier et al. \(1992\)](#) (et aussi dans [Deza et al. \(1992\)](#); [Tornambe \(1992\)](#)) est de la forme :

$$\dot{\hat{x}} = A_c \hat{x} + \phi(\hat{x}) + G(\hat{x})u + S_\infty(\theta)^{-1} C^T (C\hat{x} - y) \quad (1.69)$$

où $S_\infty(\theta)$ est la solution de l'équation de Riccati suivante :

$$\begin{cases} \theta S_\infty(\theta) + A_c^T S_\infty(\theta) + S_\infty(\theta) A_c - C^T C = 0 \\ S_\infty(\theta) = S_\infty^T(\theta) \end{cases} \quad (1.70)$$

De plus, si θ est choisi assez grand, alors :

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \Gamma \exp\left(-\frac{\theta t}{3}\right) \|\hat{x}_0 - x_0\| \quad (1.71)$$

où $\Gamma(\theta) \geq 0$. Contrairement au cas de l'observateur de Thau et ses généralisations, si les matrices A et C sont sous forme canonique, il existe un algorithme qui permet de construire le vecteur des gains et qui assure la convergence, ainsi que la vitesse de convergence.

Dans [Busawon et al. \(1998\)](#), il est montré que le gain $K = S_\infty^{-1}(\theta) C_c^T$ peut s'écrire plus simplement comme $S_\infty^{-1}(\theta) C_c^T = \Delta_\theta^{-1} K$ où :

$$K = [C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^m]^T \quad (1.72)$$

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} \quad (1.73)$$

$$\Delta_\theta = \text{diag}\left(\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta^2}, \dots, \frac{1}{\theta^n}\right) \quad (1.74)$$

Cette méthode est étendue dans [Busawon et de Leon-Morales \(2000\)](#), en ajoutant au gain une partie qui dépend de l'état observé \hat{x} . Dans [Busawon et Saif \(1999\)](#), une construction basée sur les systèmes linéaires à temps variant est donnée, ce résultat est étendu dans [Hou et al. \(2000\)](#) pour les systèmes multi-sortie.

D'autres observateurs ont été proposés, en particulier dans [Ciccarella et al. \(1993\)](#) où un observateur basé sur le degré relatif est proposé. Cet observateur est étendu au cas multi-sortie dans [Dalla Mora et al. \(2000\)](#). Le cas où le degré relatif n'est pas bien défini est traité dans [Jo et Seo \(2000\)](#).

Plus récemment, un observateur avec des gains homogènes a été proposé dans [Andrieu](#)

et al. (2009), cet observateur permet de traiter des non-linéarités qui ne sont pas Lipschitz. En effet si le système considéré est sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(u, y) + a_1(y)x_2 + \delta_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_i = f_i(u, y, x_2, \dots, x_i) + a_i(y)x_{i+1} + \delta_i(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(u, y, x_2, \dots, x_n) + \delta_n(t) \\ y = x_1 + \delta_y(t) \end{cases} \quad (1.75)$$

et si les conditions sur les non-linéarités sont données par :

- il existe une fonction continue a , des réels $\rho, \overline{A}, \underline{A}$ tels que :

$$0 < \rho \leq a(y), \quad 0 < \underline{A} \leq \frac{a_j(y)}{a(y)} \leq \overline{A}, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (1.76)$$

pour j dans $\{1, \dots, n\}$.

- il existe un nombre réel d_∞ dans $[0, \frac{1}{n-1})$, un nombre réel positif c_∞ , une fonction continue Γ et des nombres réels v_j dans $[0, \frac{1}{j-1})$ pour $j = 2, \dots, n$, tels que :

$$|f_i(u, y, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_i) - f_i(u, y, x_2, \dots, x_i)| \leq \Gamma(u, y) \left(1 + \sum_{j=2}^n |\hat{x}_j|^{v_j} \right) \sum_{j=2}^i |\hat{x}_j - x_j| + x_\infty \sum_{j=2}^i |\hat{x}_j - x_j|^{\frac{1-d_\infty(n-i-1)}{1-d_\infty(n-j)}}$$

pour tout i dans $\{2, \dots, n\}$ et tout (\hat{x}, x, y, u) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Alors la construction d'un observateur est possible.

1.3.5 Observateur backstepping

L'observateur backstepping est une méthode qui n'est pas directement basée sur l'observateur de Kalman ou de Luenberger. Cette classe d'observateurs s'applique à des systèmes assez spécifiques. Comme pour l'observateur de Thau et à grand gain, le système est supposé être sous la forme d'une partie linéaire spécifique et une partie non linéaire en $o(x)$. Les gains sont calculés à l'aide d'un algorithme récursif et permettent de traiter des classes de systèmes qui ne sont pas Lipschitz. En contrepartie, les gains de cet observateur sont difficiles à calculer en raison de calculs de plus en plus lourds à chaque étape.

L'idée d'un observateur backstepping a d'abord été développée comme une extension du contrôleur backstepping pour pouvoir construire des contrôleurs par retour de sortie en combinant un contrôleur backstepping et un observateur backstepping dans [Krstić et al. \(1995\)](#); [Fossen et Grovlen \(1998\)](#); [Robertsson et Johansson \(1999\)](#). Ces observateurs ont été construits pour la stabilisation par retour de sortie, ce ne sont donc pas des observateurs exacts, c'est-à-dire dont l'erreur d'observation converge vers 0. Dans [Krener et](#)

Kang (2003), un observateur exact a été construit pour les systèmes sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f_n(x) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1.77)$$

ainsi que pour des systèmes avec contrôle. L'observateur proposé est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \psi_1(\hat{x})(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + \psi_2(\hat{x})(x_1 - \hat{x}_1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = \hat{x}_n + \psi_{n-1}(\hat{x})(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_n = f_n(\hat{x}) + \psi_n(\hat{x})(x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (1.78)$$

où les gains ψ_i sont calculés de manière itérative et dépendent du Jacobien de la fonction non linéaire f_n . La convergence garantie par cet observateur est seulement locale.

Une autre méthodologie a été développée ensuite, basée sur l'homogénéité dans Yang et Lin (2004); Qian et Li (2006); Qian et Lin (2006). Mais cette approche a été conçue pour construire des contrôleurs par retour de sortie, les observateurs proposés n'étaient donc pas exactes. Un premier résultat, pour la synthèse d'observateurs asymptotiques, a été obtenu dans Andrieu *et al.* (2006), puis développé dans Li *et al.* (2008). Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Kx_2 \\ \dot{x}_2 = Kx_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = Kx_n \\ \dot{x}_n = 0 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1.79)$$

Dans Li *et al.* (2008), deux observateurs ont été proposés, un observateur pour les non-linéarités d'ordres inférieurs, de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_1 = K\underline{x}_2 + Kc_1(x_1 - \underline{x}_1)^{m_2} \\ \dot{\underline{x}}_2 = K\underline{x}_3 + Kc_2(x_1 - \underline{x}_1)^{m_3} \\ \vdots \\ \dot{\underline{x}}_n = c_n(x_1 - \underline{x}_1)^{m_{n+1}} \end{cases} \quad (1.80)$$

et un observateur pour les non-linéarités d'ordres supérieurs, de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = K\bar{x}_2 + Kd_1(x_1 - \bar{x}_1)^{r_2} \\ \dot{\bar{x}}_2 = K\bar{x}_3 + Kd_2(x_1 - \bar{x}_1)^{r_3} \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_n = d_n(x_1 - \bar{x}_1)^{r_{n+1}} \end{cases} \quad (1.81)$$

où les $m_i, r_i, i = 1, \dots, n$ sont définis par :

$$m_1 = r_1 = 1, \quad m_{i+1} = m_i + \tau_2, \quad r_{i+1} = r_i + \tau_1, \quad \tau_1 \geq 0, \quad -\frac{1}{n} \leq \tau_2 \leq 0 \quad (1.82)$$

pour $i = 1, \dots, n$. On obtient les dynamiques suivantes pour l'erreur d'observation :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = Ke_2 + Kc_1(e_1)^{m_2} \\ \dot{e}_2 = Ke_3 + Kc_2(e_1)^{m_3} \\ \vdots \\ \dot{e}_n = c_n(e_1)^{m_{n+1}} \end{cases} \quad (1.83)$$

et

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1 = K\bar{e}_2 + Kd_1(e_1)^{r_2} \\ \dot{\bar{e}}_2 = K\bar{e}_3 + Kd_2(e_1)^{r_3} \\ \vdots \\ \dot{\bar{e}}_n = d_n(e_1)^{r_{n+1}} \end{cases} \quad (1.84)$$

On a le résultat de convergence suivant :

Proposition 1.3. *Li et al. (2008) Il existe des constantes c_1, \dots, c_n et d_1, \dots, d_n telles que les dynamiques d'erreurs d'ordres inférieurs (1.83) les dynamiques d'erreurs d'ordres supérieurs (1.84) soient globalement asymptotiquement stables pour toute constante strictement positive K .*

Comme les dynamiques des erreurs d'observation sont des systèmes homogènes, les systèmes d'erreur convergent même en présence de non-linéarités qui sont Hölder, d'ordre correspondant au degré d'homogénéité des systèmes (1.83) et (1.84). Cette méthode a été étendue dans [Andrieu et al. \(2008\)](#). Un observateur a été proposé, qui intègre à la fois un terme d'ordre supérieur et un terme d'ordre inférieur, ce qui permet à l'observateur de converger en présence de non linéarités d'ordres à la fois inférieurs et supérieurs. C'est l'observateur bi-limites.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons tout d'abord rappelé la notion d'observabilité, ainsi que ses principales déclinaisons pour le cas non linéaire, et également le principe d'un

observateur.

Dans un deuxième temps, nous avons présenté un état de l'art des différentes techniques de construction d'observateurs pour les systèmes continus linéaires et non linéaires. Cet état de l'art est centré sur les systèmes uniformément observables ou remplissant la condition du rang, car c'est à ces systèmes que nous nous intéressons dans la suite. Nous avons vu qu'il n'y a pas de méthodologie générale pour la construction d'observateurs, c'est un domaine de recherche où il reste encore beaucoup de problèmes non résolus.

CHAPITRE 2

CONSTRUCTION D'UN OBSERVATEUR GLOBAL EN TEMPS FINI

Sommaire

2.1	Introduction	34
2.2	Stabilité en temps fini	34
2.2.1	Définition de la stabilité en temps fini	35
2.2.2	Homogénéité et temps fini	37
2.3	Observateurs en temps fini	38
2.3.1	Précédents observateurs en temps fini	38
2.3.2	Construction d'un observateur global à grand gain en temps fini	40
2.3.2.1	Rappel des résultats antérieurs	40
2.3.2.2	Construction de l'observateur global en temps fini	49
2.3.3	Exemples	56
2.3.3.1	Premier exemple	56
2.3.3.2	Deuxième exemple	60
2.4	Conclusion	61

2.1 Introduction

La majorité des observateurs qui existent dans la littérature sont des observateurs qui convergent asymptotiquement, c'est-à-dire que l'erreur d'observation tend vers zéro, mais ne l'atteint jamais. Or, il existe un certain nombre de problèmes où la connaissance exacte de l'état est requise. Par exemple en robotique, en particulier pour la marche humaine, les contrôleurs sont très sensibles aux erreurs et une connaissance parfaite de l'état est donc nécessaire, (voir [Plestan *et al.* \(2003\)](#)). Un autre domaine qui nécessite des observateurs en temps fini est la synchronisation de signaux chaotiques. [Nijmeijer et Mareels \(1997\)](#) ont montré que le problème de la synchronisation est équivalent à trouver un observateur. Dans le cas de la synchronisation de signaux chaotiques, le caractère chaotique oblige à avoir un degré de précision extrêmement élevé. En effet, deux solutions avec des conditions initiales très proches peuvent donner des solutions de formes très différentes. Dans ce cadre, l'utilisation d'observateurs en temps fini permet de reconstruire exactement le signal contrairement à un observateur classique, (voir [Azemi et Yaz \(2000\)](#); [Perruquetti *et al.* \(2008\)](#), par exemple).

Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans un premier temps, nous rappelons la définition de la stabilité en temps fini, ainsi que les différentes conditions permettant d'obtenir la convergence en temps fini. La deuxième partie est consacrée à la construction d'observateurs en temps fini, après avoir rappelé les précédents observateurs existants, nous construisons un observateur global en temps fini pour la classe des systèmes uniformément observables, globalement Lipschitz et dont l'entrée est bornée.

2.2 Stabilité en temps fini

La stabilité en temps fini est beaucoup plus restrictive que la stabilité asymptotique. Pour cela, nous aurons besoin de définir de nouveaux outils afin d'obtenir la stabilité en temps fini de systèmes dynamiques. En particulier, dans le cas d'un système stable en temps fini à l'origine, toutes les solutions convergent en temps fini vers l'origine. Ainsi, un tel système ne possède pas la propriété d'unicité des solutions : il ne peut être Lipschitz au point d'équilibre. Nous serons obligés de considérer des systèmes non lisses, ce qui nous force à prendre des précautions par rapport à l'existence des solutions. Par exemple, pour les systèmes non continus, l'existence de solutions n'est pas assurée. Il faut alors élargir la définition de solution en considérant des inclusions différentielles, par exemple comme dans [Filippov \(1988\)](#). Cependant, dans ce mémoire, nous considérerons uniquement des systèmes continus. En effet, pour un système continu, l'existence de solution au sens classique est toujours assurée, mais l'unicité des solutions n'est pas obligatoire contrairement aux systèmes de classe C^1 . Donc il est possible d'obtenir la stabilité en temps fini pour des systèmes seulement continus.

2.2.1 Définition de la stabilité en temps fini

Nous considérons ici des systèmes de la forme :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathcal{V} \quad (2.1)$$

où f est un champ de vecteurs continu et \mathcal{V} est un voisinage ouvert de l'origine. Nous avons la définition suivante :

Définition 2.1. *Bhat et Bernstein (2000)* L'origine du système (2.1) est un point d'équilibre stable en temps fini (localement) si il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ de l'origine et une fonction $T : \mathcal{V} \setminus \{0\} \rightarrow]0, \infty[$, appelée temps d'établissement du système (2.1), tels que l'on ait les propriétés suivantes :

- Convergence en temps fini : Pour tout $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, et pour toute solution $x(t)$ de (2.1) telle que $x(0) = x_0$, $x(t)$ est définie sur $[0, T(x_0)[$ et $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t, x_0) = 0$.
- Stabilité au sens de Lyapunov : Pour tout voisinage \mathcal{U}_ϵ de l'origine, il existe un voisinage \mathcal{U}_δ de l'origine, tel que pour tout $x_0 \in \mathcal{U}_\delta \setminus \{0\}$ et pour toute solution $x(t)$ de (2.1) telle que $x(0) = x_0$, $x(t) \in \mathcal{U}_\epsilon$ pour tout $t \in [0, T(x_0)[$.

L'origine est un point d'équilibre globalement stable en temps fini si il est stable en temps fini avec $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathbb{R}^n$.

Nous illustrons la définition précédente par un exemple classique.

Exemple 2.1. Soit l'équation différentielle :

$$\dot{x} = -\text{sign}(x)|x|^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in]0, 1[\quad (2.2)$$

Les solutions partant de x_0 au temps $t = 0$ sont données par :

$$x(t, x_0) = \begin{cases} \text{sign}(x_0) (|x_0|^{1-\alpha} - t(1-\alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{1-\alpha}, x_0 \neq 0 \\ 0 & \text{si } t > \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{1-\alpha}, x_0 \neq 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0, x_0 = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Les solutions décroissent et finissent par être nulles à partir d'un certain temps. Le système (2.2) est donc stable en temps fini. De plus, le temps d'établissement est donné par :

$$T(x_0) = \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad (2.4)$$

◇

Dans le cas général, l'utilisation directe de la définition de la stabilité en temps fini n'est pas possible sans la connaissance des solutions. Des conditions suffisantes ont donc été développées. Un des premiers résultats a été obtenu dans [Haimo \(1986\)](#), où une condition nécessaire et suffisante a été obtenue pour les systèmes de dimension 1 :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

Lemme 2.1. *Haimo (1986)* Supposons que l'origine soit un point d'équilibre du système (2.5), où f est continue. Alors l'origine est stable en temps fini sur un voisinage \mathcal{V} de l'origine pour le système (2.5) si et seulement pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$:

- $xf(x) < 0$ et
- $\int_x^0 \frac{dz}{f(z)} < +\infty$.

Ce résultat se généralise aux dimensions supérieures, mais cette condition devient alors seulement suffisante.

Proposition 2.1. *Moulay et Perruquetti (2003)* Supposons que l'origine soit un point d'équilibre pour le système (2.1) où f est continue. S'il existe une fonction de Lyapunov $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ pour le système (2.1), satisfaisant la condition :

$$\dot{V}(x) \leq -r(V(x)) \quad (2.6)$$

avec $r : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction localement Lipschitz en dehors de l'origine telle que pour tout $\epsilon > 0$ $\int_0^\epsilon \frac{dz}{r(z)} < +\infty$, alors l'origine est stable en temps fini. De plus, le temps d'établissement du système (2.1) vérifie :

$$T(x_0) \leq \int_0^{V(x_0)} \frac{dz}{r(z)}. \quad (2.7)$$

Exemple 2.2. Une fonction $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, $\int_0^\epsilon \frac{dz}{f(z)} < \infty$ est donnée par $r(s) = \text{sign}(s) \cdot |s|^\sigma$ avec $0 < \sigma < 1$. \diamond

Si on suppose plus de conditions sur le système (2.1) alors on peut obtenir une condition nécessaire et suffisante en terme de fonctions de Lyapunov pour la stabilité en temps fini du système (2.1). Pour cela, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 2.2. Le système (2.1) possède l'unicité des solutions à droite en dehors de l'origine si :

pour tout $x_0 \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, il existe $T_{x_0} > 0$ tel que, si $x_1 : [0, T_1[\rightarrow \mathcal{V}$ et $x_2 : [0, T_2[\rightarrow \mathcal{V}$ sont deux solutions maximales de (2.1) avec $x_1(0) = x_2(0) = x_0$, alors $T_{x_0} \leq \min\{T_1, T_2\}$ et $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \in [0, T_{x_0}[$.

On peut supposer sans perte de généralité que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, T_{x_0} est choisi de façon à être le plus grand possible dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

On a donc le résultat suivant :

Proposition 2.2. *Bhat et Bernstein (2000)* Supposons que le système (2.1) possède l'unicité à droite des solutions en dehors de l'origine. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. l'origine du système (2.1) est stable en temps fini avec un temps d'établissement continu à l'origine.

2. il existe une constante $c > 0$, $\alpha \in]0, 1[$ et une fonction de Lyapunov $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\dot{V}(x) \leq -cV(x)^\alpha \quad (2.8)$$

pour tout $x \in \mathcal{V}$.

Remarque 2.1. Si la fonction de Lyapunov V est définie sur \mathbb{R}^n , radialement non bornée, et si la condition 2 est vérifiée globalement, alors l'origine du système (2.1) est globalement stable en temps fini.

Les résultats précédents s'appliquent pour la stabilité globale. Le résultat suivant s'applique dans le cas où la stabilité recherchée est semi-globale et non globale.

Proposition 2.3. *Shen et Xia (2008)* Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que :

$$\dot{V}(x) \leq -lV(x)^\alpha + kV(x), \quad \forall x \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \quad (2.9)$$

où $l, k > 0$ et $0 < \alpha < 1$. Alors l'origine du système (2.1) est stable en temps fini sur :

$$\Omega = \left\{ x : V(x)^{1-\alpha} < \frac{l}{k} \right\} \cap \mathcal{V} \quad (2.10)$$

qui est contenu dans le domaine d'attraction de l'origine. Le temps d'établissement satisfait :

$$T(x_0) \leq \frac{\ln(1 - \frac{k}{l}V(x_0)^{1-\alpha})}{k(\alpha - 1)}, \quad x_0 \in \Omega \quad (2.11)$$

2.2.2 Homogénéité et temps fini

Nous venons de donner des conditions suffisantes pour qu'un système soit stable en temps fini. Dans certains cas, ces conditions sont même nécessaires et suffisantes. Les conditions suffisantes en termes de fonctions de Lyapunov sont très puissantes. Malheureusement, dans le cas général, il est très difficile de trouver une fonction de Lyapunov correspondante aux conditions pour la stabilité en temps fini. En utilisant l'homogénéité, il est possible de trouver des conditions suffisantes qui peuvent se vérifier beaucoup plus facilement, même si celles-ci ne s'appliquent qu'à des classes restreintes de systèmes. Nous considérons le système suivant :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.12)$$

où f est continue.

Théorème 2.1. (*Bhat et Bernstein, 1997, Théorème 2*) Supposons que le système (2.12) soit homogène de degré $d < 0$ par rapport aux poids $(r_1, \dots, r_n) \in ((0, +\infty))^n$. Alors l'origine du système (2.12) est globalement stable en temps fini si et seulement si elle est localement asymptotiquement stable.

Le résultat suivant montre que la stabilité en temps fini persiste même en présence de perturbations sur l'état.

Théorème 2.2. (*Bhat et Bernstein, 2005, Théorème 7.4*) *Supposons que le champ de vecteurs f se décompose sous la forme $f = g_1 + \dots + g_k$, où, pour chaque $i = 1, \dots, k$, le champ de vecteurs g_i est continu, homogène de degré m_i par rapport aux poids $(r_1, \dots, r_n) \in ((0, +\infty))^n$ et $m_1 < m_2 < \dots < m_k$. Si l'origine du système*

$$\dot{x} = g_1(x) \quad (2.13)$$

est stable en temps fini, alors l'origine est localement stable en temps fini pour le champ de vecteurs f .

2.3 Observateurs en temps fini

2.3.1 Précédents observateurs en temps fini

La première approche développée pour la synthèse d'observateurs en temps fini a été celle des observateurs par modes glissants, (voir [Drakunov et Utkin \(1995\)](#); [Haskara et al. \(1998\)](#)). Cependant cette approche considère des systèmes dont le membre de droite n'est pas continu, or l'existence de solutions au sens classique n'est pas assurée pour ces systèmes. On peut alors considérer la théorie des inclusions différentielles et les solutions au sens de Filippov. Dans ce mémoire, nous ne considérerons que des systèmes dont le membre de droite est continu. Cela permet d'utiliser des outils classiques bien connus et plus facilement implémentables.

Le développement des observateurs continus en temps fini est assez récent. En effet, un premier résultat à été donné dans [Engel et Kreisselmeier \(2002\)](#) pour les systèmes linéaires invariants dans le temps. Ce résultat utilise la théorie des systèmes à retards. Nous rappelons ici ce résultat.

Considérons le système linéaire invariant dans le temps :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = Cx, & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.14)$$

où la paire (A, C) est supposée observable. L'équation :

$$\dot{z}_i = (A - K_i C)z_i + K_i y + Bu, \quad (i = 1, 2) \quad (2.15)$$

représente deux différents observateurs standard de Luenberger pour le système (2.14). En notant $F_i := A - K_i C$, $i = 1, 2$ et :

$$\begin{aligned} F &:= \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}, & K &:= \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \\ G &:= \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, & T &:= \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix}, & z &:= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

les deux observateurs sont combinés en une seule équation. Un retard $d > 0$ est utilisé pour générer un nouvel état estimé \hat{x} par :

$$\dot{z} = Fz + Ky + Gu, \quad t \geq t_0 \quad (2.17)$$

$$\hat{x}(t) = H \left[z(t) - e^{Fd} z(t-d) \right] \quad (2.18)$$

Dû au retard, cet observateur a pour condition initiale $z(t)$ avec $t \in [t_0 - d, t_0]$. Le résultat suivant a été obtenu sur la convergence de cet observateur.

Théorème 2.3. *Engel et Kreisselmeier (2002) Supposons que K et d soient choisis tels que*

(i) *F est stable*

(ii) *$\det[T, e^{Fd}T] \neq 0$*

Alors, (2.17) et (2.18) avec $H := [I_n, 0_n][T, e^{Fd}T]^{-1}$ forment un observateur pour le système (2.14), dont l'état estimé \hat{x} converge vers x en un temps fini d .

Ce résultat a été étendu dans Menold et al. (2003b) pour les systèmes sous une forme canonique d'observabilité, c'est-à-dire avec une partie linéaire invariante dans le temps plus une partie non linéaire en la sortie. La même méthodologie a été utilisée dans Menold et al. (2003a) pour construire un observateur en temps fini pour les systèmes linéaires variants dans le temps. Pour cette construction, la matrice de transition est introduite afin de comparer le délai et les estimées. Dans Sauvage et al. (2007), un observateur utilisant le même principe est conçu. Cet observateur est construit en une seule étape contrairement aux précédents observateurs. Seul le calcul de l'inverse de la Jacobienne du changement de variables est nécessaire pour le construire.

Un autre outil a été beaucoup développé ces dernières années pour la construction d'observateurs en temps fini : c'est l'homogénéité. En effet, pour un système homogène, le théorème 2.1 donne une condition très simple à vérifier pour montrer la convergence en temps fini, ce théorème a été exposé dans Bhat et Bernstein (2000). Une première approche a été développée dans Hong et al. (2001) utilisant l'homogénéité pour la conception d'un contrôleur par retour de sortie pour les systèmes de dimension deux. De là, deux approches différentes ont été développées. En effet, pour montrer qu'un système homogène est stable en temps fini, il faut montrer que son degré d'homogénéité est négatif et qu'il est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Les deux différentes approches correspondent à la façon de montrer la stabilité au sens de Lyapunov. Une première approche est l'approche dite de "backstepping", cette construction marche très bien avec les systèmes homogènes, car c'est un algorithme récursif, voir Qian et Li (2005); Li et Qian (2006); Li et al. (2008); Andrieu et al. (2008). Cependant, le calcul des gains se révèle très compliqué quand l'ordre du système augmente. Une approche alternative a été mise en place, basée sur le cas linéaire : c'est la méthode duale de celle proposée dans Bhat et Bernstein (2000) pour le contrôle. Cette construction a été proposée dans Perruquetti et al. (2008) pour les systèmes linéaires à une injection d'entrées/sorties près. Dans Shen et Xia (2008), cette approche a été généralisée aux systèmes uniformément

observables, mais l'observateur obtenu n'est que semi-global. Dans [Shen et Huang \(2009\)](#), un observateur avec un gain adaptatif a permis d'obtenir la convergence globale. Nous construisons également un observateur global, mais avec un gain fixe, le même que dans le cas linéaire. Ceci permet une mise en place simplifiée de l'observateur. Ce résultat a été exposé dans [Ménard *et al.* \(2010\)](#).

2.3.2 Construction d'un observateur global à grand gain en temps fini

2.3.2.1 Rappel des résultats antérieurs

Nous rappelons tout d'abord les résultats de [Perruquetti *et al.* \(2008\)](#) et [Shen et Xia \(2008\)](#), car nos résultats sont une généralisation de ces méthodes.

Dans [Perruquetti *et al.* \(2008\)](#) la construction d'un observateur pour les systèmes sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(y, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}), & x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{N}_{>0} \\ y = C_c x, & y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.19)$$

où u est une entrée suffisamment dérivable et :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_c = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (2.20)$$

est considéré. L'observateur proposé dans [Perruquetti *et al.* \(2008\)](#) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} + f(y, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}) - \begin{pmatrix} k_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_1} \\ k_2 [\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_2} \\ \vdots \\ k_n [\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_n} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

où $[x]^\alpha = \text{sgn}(x) \cdot |x|^\alpha$, $\alpha > 0$. Les gains k_i , ($i = 1, \dots, n$) et les puissances α_i , ($i = 1, \dots, n$) sont définis dans la suite. L'équation de l'erreur d'observation est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k_1 [e_1]^{\alpha_1} \\ \dot{e}_2 = e_3 - k_2 [e_1]^{\alpha_2} \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n - k_{n-1} [e_1]^{\alpha_{n-1}} \\ \dot{e}_n = -k_n [e_1]^{\alpha_1} \end{cases} \quad (2.22)$$

avec $e = \hat{x} - x$.

Afin de pouvoir appliquer le théorème 2.1, il faut choisir les puissances α_i , ($i = 1, \dots, n$) de telle façon que le système (2.22) soit homogène.

Lemme 2.2. *Perruquetti et al. (2008) Soit $d \in \mathbb{R}$ et $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$. Supposons que $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ vérifient :*

$$r_{i+1} = r_i + d, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (2.23)$$

$$\alpha_i = \frac{r_{i+1}}{r_1}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (2.24)$$

$$\alpha_n = \frac{r_n + d}{r_1} \quad (2.25)$$

Alors le système (2.22) est homogène de degré d avec les poids $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$.

En fixant $\alpha_1 = \alpha$, le degré et les poids s'écrivent alors de manière explicite.

Lemme 2.3. *Perruquetti et al. (2008) Si $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$, alors le système (2.22) est homogène de degré $\alpha - 1$ avec les poids :*

$$r_i = (i-1)\alpha - (i-2), \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.26)$$

et :

$$\alpha_i = i\alpha - (i-1), \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.27)$$

Le système (2.22) peut être réécrit sous forme compacte :

$$\dot{e} = \psi(\alpha, e) \quad (2.28)$$

Afin de prouver la stabilité de (2.22), nous aurons besoin du lemme du tube :

Lemme 2.4. *(Munkres, 1999, Lemme du tube) Considérons l'espace produit : $X \times Y$ où Y est un compact. Si N est un ouvert de $X \times Y$ contenant la tranche $\{x_0\} \times Y$ de $X \times Y$, alors N contient un tube $W \times Y$ de $\{x_0\} \times Y$, où W est un voisinage ouvert de x_0 dans X .*

Le résultat suivant montre que si les gains sont choisis de la même manière que pour un observateur linéaire, alors en réglant le gain α assez proche de 1 (c'est le cas linéaire), on obtient la stabilité en temps fini.

Théorème 2.4. *Perruquetti et al. (2008) Si les gains (k_1, \dots, k_n) sont fixés tels que la matrice :*

$$A_0 = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

soit de Hurwitz. Alors, il existe $\epsilon \in (0, \frac{1}{n})$ tel que pour tout $\alpha \in (1 - \epsilon, 1)$, le système (2.28) est globalement stable en temps fini.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$1 - \frac{1}{n-1} < \alpha < 1 \quad (2.30)$$

Homogénéité : D'après le lemme 2.3, le système (2.28) est homogène de degré $\alpha - 1 < 0$ avec les poids $r_i = (i-1)\alpha - (i-2)$, $i = 1, \dots, n$.

Stabilité asymptotique : Considérons la fonction différentiable définie positive, définie par :

$$V(\alpha, e) = \tilde{e}^T P \tilde{e} \quad (2.31)$$

où :

$$\tilde{e} = \begin{pmatrix} [e_1]^{\frac{1}{q}} \\ [e_2]^{\frac{1}{\alpha_1 q}} \\ \vdots \\ [e_n]^{\frac{1}{\alpha_{n-1} q}} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

avec $q = \prod_{i=1}^{n-1} ((i-1)\alpha - (i-2))$ le produit des poids, et P la solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$A_0^T P + P A_0 = -I \quad (2.33)$$

Comme V est propre, l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \{e \in \mathbb{R}^n : V(1, e) = 1\} \quad (2.34)$$

est un compact de \mathbb{R}^n . Soit φ la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, e) &\mapsto \langle \nabla V(\alpha, e); \psi(\alpha, e) \rangle \end{aligned} \quad (2.35)$$

Comme A_0 est de Hurwitz, le système :

$$\dot{e} = A_0 e \quad (2.36)$$

est globalement asymptotiquement stable et correspond au système (2.28) avec $\alpha = 1$. Comme φ est continue, $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est un ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S}$ qui contient la tranche $\{1\} \times \mathcal{S}$. Comme \mathcal{S} est compact, alors d'après le lemme 2.4, l'ensemble $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ contient un tube $(1 - \epsilon_1, 1 + \epsilon_2) \times \mathcal{S}$ de $\{1\} \times \mathcal{S}$, tel que, pour tout $(\alpha, e) \in (1 - \epsilon_1, 1 + \epsilon_2) \times \mathcal{S}$, on ait :

$$V(\alpha, \lambda^{r_1} e_1, \dots, \lambda^{r_n} e_n) = \lambda^{\frac{2}{q}} V(\alpha, e_1, \dots, e_n) \quad (2.37)$$

avec $r_i = (i-1)\alpha - (i-2)$ pour $1 \leq i \leq n$. Donc la fonction $e \mapsto V(\alpha, e)$ est homogène de degré $\frac{2}{q}$ avec les poids $r_i = (i-1)\alpha - (i-2)$, $i = 1, \dots, n$. La fonction $e \mapsto \langle \nabla V(\alpha, e), \psi(\alpha, e) \rangle$ est homogène de degré $\frac{2}{q} + \alpha - 1$ avec les poids $r_i = (i-1)\alpha - (i-2)$, $i = 1, \dots, n$, et est donc définie négative. Cela implique que pour $\alpha \in (1 - \epsilon_1, 1 + \epsilon_2)$, :

$$e \mapsto V(\alpha, e) \quad (2.38)$$

est une fonction de Lyapunov pour le système (2.22). D'après le théorème 2.1, le système (2.28) est globalement stable en temps fini. \square

Le prochain résultat que nous rappelons a été donné dans [Shen et Xia \(2008\)](#). Les systèmes considérés sont les systèmes uniformément observables, affine en l'entrée, comportant plusieurs entrées et une sortie, i.e. sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + \sum_{j=1}^m f_j(x)u_j, & x \in \mathbb{R}^n, u_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, m \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.39)$$

D'après [Hammouri et al. \(2002\)](#), pour cette classe de systèmes, l'application donnée par :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} h(x) \\ \mathcal{L}_{f_0} h(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{f_0}^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

définie un système de coordonnées locales (presque partout), qui transforme le système (2.39) en un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sum_{j=1}^m g_{1j}(x_1)u_j \\ \dot{x}_2 = x_3 + \sum_{j=1}^m g_{2j}(x_1, x_2)u_j \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m g_{nj}(x_1, \dots, x_n)u_j \\ y = x_1 = C_c x \end{cases} \quad (2.41)$$

Nous supposons ici, de plus, que les fonctions φ et g_{ij} satisfont une hypothèse de Lipschitz globale, c'est-à-dire qu'il existe une constante $l > 0$, telle que :

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq l \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ |g_{ij}(x) - g_{ij}(y)| &\leq l \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.42)$$

et les entrées u_j , $j = 1, \dots, m$, sont supposées bornées, c'est-à-dire qu'il existe une constante $u_0 \geq 0$ telle que :

$$|u_j| \leq u_0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.43)$$

L'observateur proposé dans [Shen et Xia \(2008\)](#) est basé sur l'observateur à grand gain proposé dans [Gauthier et al. \(1992\)](#). Il est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1 [\hat{x}_1 - y]^{\alpha_1} + \sum_{j=1}^m g_{1j}(\hat{x}_1)u_j \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - k_2 [\hat{x}_1 - y]^{\alpha_2} + \sum_{j=1}^m g_{2j}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)u_j \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n = \varphi(\hat{x}) - k_n [\hat{x}_1 - y]^{\alpha_n} + \sum_{j=1}^m g_{nj}(\hat{x})u_j \end{cases} \quad (2.44)$$

Les puissances α_i , ($i = 1, \dots, n$) sont définies comme dans le lemme 2.3 par :

$$\alpha_i = i\alpha - (i - 1), \quad i = 1, \dots, n, \quad \alpha \in \left] 1 - \frac{1}{n}, 1 \right[\quad (2.45)$$

Les gains sont donnés par :

$$K = [k_1, \dots, k_n]^T = S_\infty^{-1}(\theta) C_c^T \quad (2.46)$$

où $S_\infty(\theta)$ est solution de l'équation de Riccati stationnaire suivante :

$$\begin{cases} \theta S_\infty(\theta) + A^T S_\infty(\theta) + S_\infty(\theta) A - C^T C = 0 \\ S_\infty(\theta) = S_\infty^T(\theta) \end{cases} \quad (2.47)$$

En posant $e = \hat{x} - x$, l'équation de l'erreur est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k_1 \lceil e_1 \rceil^{\alpha_1} + \tilde{f}_1 \\ \dot{e}_2 = e_3 - k_2 \lceil e_1 \rceil^{\alpha_2} + \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n - k_{n-1} \lceil e_1 \rceil^{\alpha_{n-1}} + \tilde{f}_{n-1} \\ \dot{e}_n = -k_n \lceil e_1 \rceil^{\alpha_n} + \tilde{f}_n \end{cases} \quad (2.48)$$

où les fonctions \tilde{f}_i , $i = 1, \dots, n$, sont données par :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i &= \sum_{j=1}^m (g_{ij}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_i) - g_{ij}(x_1, \dots, x_i)) u_j, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \tilde{f}_n &= (\varphi(\hat{x}) - \varphi(x)) + \sum_{j=1}^m (g_{nj}(\hat{x}) - g_{nj}(x)) u_j \end{aligned} \quad (2.49)$$

Le résultat de convergence suivant a été obtenu dans [Shen et Xia \(2008\)](#).

Théorème 2.5. *Shen et Xia (2008) Supposons que l'entrée $u \in \mathbb{R}^m$ soit bornée par une constante $u_0 \geq 0$, et que les fonctions φ et g_{ij} , ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$) soient globalement Lipschitz de constante l . Alors le système non linéaire (2.41) admet le système (2.44) comme observateur semi-global en temps fini.*

Nous établissons dans un premier temps quelques propriétés nécessaires à la démonstration. Nous considérons à nouveau la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\alpha, e) = \tilde{e}^T S_\infty(\theta) \tilde{e} \quad (2.50)$$

où :

$$\tilde{e} = \begin{pmatrix} \lceil e_1 \rceil^{\frac{1}{q}} \\ \lceil e_2 \rceil^{\frac{1}{\alpha_1 q}} \\ \vdots \\ \lceil e_n \rceil^{\frac{1}{\alpha_{n-1} q}} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

avec $q = \prod_{i=1}^{n-1} ((i-1)\alpha - (i-2))$ le produit des poids, et $S_\infty(\theta)$ est définie par l'équation (2.47). Considérons le système sans les non linéarités :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k_1 \lceil e_1 \rceil^{\alpha_1}, \\ \dot{e}_2 = e_3 - k_2 \lceil e_1 \rceil^{\alpha_2}, \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n - k_{n-1} \lceil e_1 \rceil^{\alpha_{n-1}} \\ \dot{e}_n = -k_n \lceil e_1 \rceil^{\alpha_n} \end{cases} \quad (2.52)$$

Nous noterons f_α le champ de vecteurs associé au système (2.52). D'après le lemme 4.2 dans [Bhat et Bernstein \(2005\)](#), l'inégalité suivante est vérifiée :

$$-c_1(\alpha, \theta)[V_\alpha(e)]^{\frac{\frac{2}{q}+\alpha-1}{2}} \leq \mathcal{L}_{f_\alpha} V_\alpha(e) \leq -c_2(\alpha, \theta)[V_\alpha(e)]^{\frac{\frac{2}{q}+\alpha-1}{2}} \quad (2.53)$$

où $c_1(\alpha, \theta) = -\min_{\{z: V_\alpha(z)=1\}} \mathcal{L}_{f_\alpha} V_\alpha(z)$ et $c_2(\alpha, \theta) = -\max_{\{z: V_\alpha(z)=1\}} \mathcal{L}_{f_\alpha} V_\alpha(z)$. Pour prouver le théorème 2.5, nous aurons besoin des trois lemmes suivants.

Lemme 2.5. [Shen et Xia \(2008\)](#) $c_2(\alpha, \theta)$ satisfait $\lim_{\alpha \rightarrow 1} c_2(\alpha, \theta) = \theta$.

Démonstration. On peut facilement vérifier que :

$$\max_{\{e: V_1(e)=1\}} \mathcal{L}_{f_1} V_1(e) = \max_{\{e: V_1(e)=1\}} [-\theta e^T S_\infty(\theta) e - e_1^2] = -\theta \quad (2.54)$$

On a donc $\mathcal{L}_{f_1} V_1(e^*) = -\theta$, où $e^* = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \frac{1}{\sqrt{S_{nn}}}]$ et $S_{nn} = [S(\theta)]_{nn}$. Comme les ensembles $\{z : V_\alpha(z) = 1\}$ et $\{z : V_1(z) = 1\}$ sont en bijection, pour tout $z = [z_1, \dots, z_n]^T \in \{z : V_\alpha(z) = 1\}$ il existe un $\tilde{z} = [\lceil z_1 \rceil^{\frac{1}{q}}, \dots, \lceil z_n \rceil^{\frac{1}{\alpha_n - 1q}}] \in \{z : V_1(z) = 1\}$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \|\tilde{z} - z\|_2 = 0$. Comme $\mathcal{L}_{f_\alpha} V_\alpha$ est une fonction continue, alors, pour tout $\epsilon, \epsilon_1 > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour $|\alpha - 1| < \eta$ et $\|z - \tilde{z}\|_2 < \epsilon_1$ alors :

$$\mathcal{L}_{f_1} V_1(\tilde{z}) - \epsilon < \mathcal{L}_{f_\alpha} V_\alpha(z) < \mathcal{L}_{f_1} V_1(\tilde{z}) + \epsilon \quad (2.55)$$

d'où

$$\max_{\{z: V_\alpha(z)=1\}} \mathcal{L}_{f_\alpha} V_\alpha(z) \leq \max_{\{\tilde{z}: V_1(\tilde{z})=1\}} \mathcal{L}_{f_1} V_1(\tilde{z}) + \epsilon = -\theta + \epsilon \quad (2.56)$$

Donc on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \mathcal{L}_{f_\alpha} V_\alpha(e) \leq -\theta \quad (2.57)$$

D'un autre coté, soit $e^{**} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \frac{-\alpha_n - 1q}{s_{nn}^{\frac{1}{2}}}]^T$ alors :

$$e^{**} \in \{e : V_\alpha(e) = 1\} \quad (2.58)$$

et :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \mathcal{L}_{f_\alpha} V_\alpha(e^{**}) = \mathcal{L}_{f_1} V_1(e^*) = -\theta \quad (2.59)$$

Donc, $\max_{\{e: V_\alpha(e)=1\}} \mathcal{L}_{f_\alpha} V_\alpha(e) \geq \mathcal{L}_{f_\alpha} V_\alpha(e^{**})$. En conséquence il vient :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \max_{\{e: V_\alpha(e)=1\}} \mathcal{L}_{f_\alpha} V_\alpha(e) \geq \lim_{\alpha \rightarrow 1} \mathcal{L}_{f_\alpha} V_\alpha(e^{**}) \quad (2.60)$$

Finalement :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \max_{\{e: V_\alpha(e)=1\}} \mathcal{L}_{f_\alpha} V_\alpha(e) = -\theta \quad (2.61)$$

Ce qui complète la preuve. \square

Lemme 2.6. *Shen et Xia (2008)* Quand $\alpha = 1$, pour $u \in \mathbb{R}^m$ borné par un réel $u_0 \geq 0$, il existe un réel $\theta_1 \geq 1$ assez grand, tel que pour tout $\theta \geq \theta_1$ le système (2.48) soit exponentiellement stable.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe du Théorème 3 dans Gauthier et al. (1992). \square

Si le système (2.41) est initialisé avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et le système (2.44) est initialisé avec $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, alors on a le résultat suivant :

Lemme 2.7. *Shen et Xia (2008)* Pour le système (2.48), il existe $\epsilon_2 \in (1 - \frac{1}{n-1}, 1)$ tel que pour tout $\alpha \in (1 - \epsilon_2, 1]$ on ait les inégalités suivantes :

$$V_\alpha(e) \leq S\|e_0\|_2, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.62)$$

$$\|\tilde{e}\|_2 \leq \frac{S}{\delta_0}\|e_0\|_2, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.63)$$

où $V_\alpha(e)$ et \tilde{e} sont donnés par l'équation (2.50), $e_0 = x_0 - \hat{x}_0$, $S = \max_{i,j} |S_\infty(1)|_{i,j}$ et $\delta_0 > 0$ est un réel. De plus, pour $i = 2, \dots, n$, $k = 1, \dots, i$, il existe $\theta_2 \geq 1$ tel que pour tout $\theta \geq \theta_2$, on ait l'inégalité suivante :

$$\frac{|e_k(t)|^{\frac{1}{\alpha_i - 1q}}}{\theta^i} \leq \frac{|e_k(t)|^{\frac{1}{\alpha_k - 1q}}}{\theta^k} \quad (2.64)$$

Démonstration. Soit $d = e_0^T S_\infty(\theta) e_0$, $\mathcal{A}' = V_\alpha^{-1}([0, d])$, $\mathcal{D}' = V_1^{-1}(\{d\})$. Notons f'_α le champ de vecteurs associé au système (2.48). Alors \mathcal{A}' et \mathcal{D}' sont compacts. On définit :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} \quad (0, d] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, e) &\mapsto \mathcal{L}_{f'_\alpha} V_\alpha(e) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Alors φ' est une fonction continue et d'après le lemme 2.6, satisfait $\varphi'(1, e) < 0$. Il existe donc $\epsilon_2 > 0$ tel que $\bar{\varphi}((1 - \epsilon_2, 1]) \subset (-\infty, 0)$. Ainsi, pour tout $\alpha \in (1 - \epsilon_2, 1]$, $\mathcal{L}_{f'_\alpha} V_\alpha$ prend des valeurs négatives sur \mathcal{D}' . L'ensemble \mathcal{A}' est donc strictement positivement invariant par f'_α pour tout $\alpha \in (1 - \epsilon_2, 1]$, et donc :

$$\tilde{e}^T S_\infty(\theta) \tilde{e} \leq e_0^T S_\infty(\theta) e_0 \quad (2.66)$$

Comme il existe un réel $\delta_0 > 0$ tel que $S_\infty(\theta) \geq \delta_0 I$ (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x^T S_\infty(\theta) x \geq \delta_0 x^T x$), d'après Gauthier et al. (1992), il vient :

$$\delta_0 \|\tilde{e}\|_2 \leq \tilde{e}^T S_\infty(\theta) \tilde{e} \leq e_0^T S_\infty(\theta) e_0 \leq S\|e_0\|_2 \quad (2.67)$$

Si $\|e_0\|_2 \leq 1$, comme $1 \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{\alpha_1 q} \leq \dots \leq \frac{1}{\alpha_{n-1} q}$ et $\theta \geq 1$ cela entraîne l'inégalité (2.64). Si $|e_k(t)| > 1$, d'après l'inégalité (2.63), $e_k(t)$ est borné. Il existe donc un réel θ_2 tel que pour tout $\theta \geq \theta_2$ l'inégalité (2.64) soit satisfaite. \square

Nous allons maintenant pouvoir démontrer le théorème 2.5 :

Démonstration du théorème (2.5). La preuve du Théorème est divisée en deux parties. Tout d'abord nous calculons la dérivée de la fonction de Lyapunov le long des solutions de l'équation différentielle (2.48) afin d'obtenir une inégalité de la forme (2.9). Ensuite, nous appliquons la proposition 2.3 afin d'en déduire l'ensemble de convergence.

Calcul de la dérivée de la fonction de Lyapunov

Nous commençons par calculer la dérivée de la fonction $V_\alpha(e)$, donnée par l'équation (2.50), le long des solutions du système (2.48). Notons tout d'abord que :

$$\frac{d}{dt}[e_i]^{\alpha_i} = \alpha_i |e_i|^{\alpha_i-1} \quad (2.68)$$

d'après [Hong \(2002\)](#). En utilisant la relation (2.68), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_\alpha(e)|_{(2.48)} &= \frac{d}{dt}V_\alpha(e)|_{(2.52)} + 2\tilde{e}^T S_\infty(\theta) \begin{bmatrix} \frac{1}{q}|e_1|^{\frac{1}{q}-1}\tilde{f}_1 \\ \frac{1}{\alpha_1 q}|e_2|^{\frac{1}{\alpha_1 q}-1}\tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1} q}|e_n|^{\frac{1}{\alpha_{n-1} q}-1}\tilde{f}_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} &\leq -c_2(\alpha, \theta)[V_\alpha(e)]^{\frac{\frac{2}{q}+\alpha-1}{2}} + 2l(u_0 + 1)p[\tilde{e}^T S_\infty(\theta)\tilde{e}]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left[\sum_{i,j} \frac{|S(1)_{i,j}|}{\theta^{i+j-1}} \cdot \frac{|e_i|^{\frac{1}{\alpha_{i-1} q}-1} \sum_{k=1}^i |e_k|}{\alpha_{i-1} q} \times \frac{|e_j|^{\frac{1}{\alpha_{j-1} q}-1} \sum_{k=1}^j |e_k|}{\alpha_{j-1} q} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.70)$$

En utilisant l'inégalité de Young :

$$|x||y|^{p-1} \leq \frac{1}{p}|x|^p + \frac{p-1}{p}|y|^p, \quad \forall x, y > 0, \quad \forall p > 0 \quad (2.71)$$

il existe des constantes positives \bar{c}_i ($1 \leq i \leq n$) telles que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\sum_{k=1}^i |e_i|^{\frac{1}{\alpha_{i-1} q}-1} |e_k| \leq \sum_{k=1}^i \left[\bar{c}_i |e_i|^{\frac{1}{\alpha_{i-1} q}} + \alpha_{i-1} q \left(\frac{1-\alpha_{i-1} q}{\bar{c}_i} \right)^{\frac{1}{\alpha_{i-1} q}-1} |e_k|^{\frac{1}{\alpha_{i-1} q}} \right] \quad (2.72)$$

$$\triangleq \sum_{k=1}^i b_{i,k} |e_k|^{\frac{1}{\alpha_{i-1} q}} \quad (2.73)$$

où $b_{i,k} > 0$. Soit $b = \max_{i,k} b_{i,k}$, alors :

$$\frac{d}{dt}V_\alpha(e)|_{(2.48)} \leq -c_2(\alpha, \theta)[V_\alpha(e)]^{\frac{\frac{2}{q}+\alpha-1}{2}} + \frac{2bl(u_0 + 1)pS^{\frac{1}{2}}}{\alpha_{n-1} q} \times [\tilde{e}^T S_\infty(\theta)\tilde{e}]^{\frac{1}{2}} \quad (2.74)$$

$$\times \left[\sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^i \frac{e_k^{\frac{2}{\alpha_{k-1} q}}}{\theta^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^j \frac{e_k^{\frac{2}{\alpha_{k-1} q}}}{\theta^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.75)$$

Soit $\xi_k = \frac{[e_k]^{\frac{1}{\alpha_k-1q}}}{\theta^k}$ pour $\theta \geq \max\{\theta_1, \theta_2\} \geq 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_\alpha(e) |_{(2.48)} &\leq -c_2(\alpha, \theta) [V_\alpha(e)]^{\frac{\frac{2}{q} + \alpha - 1}{2}} \\ &\quad + \frac{2bl(u_0+1)pS^{\frac{1}{2}}}{\alpha_{n-1}q} \times [\tilde{e}^T S_\infty(\theta) \tilde{e}]^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Soit $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$, comme $S_\infty(\theta) \geq \delta_0 I$, alors :

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^2 \leq \frac{1}{\delta_0} \xi^T S_\infty(1) \xi \quad (2.77)$$

$$= \frac{1}{\delta_0 \theta} \left[[e_i]^{\frac{1}{\alpha_i-1q}} \frac{S_\infty(1)_{i,j}}{\theta^{i+j-1}} [e_j]^{\frac{1}{\alpha_j-1q}} \right]_{i,j} \quad (2.78)$$

$$= \frac{1}{\theta \delta_0} \left[[e_i]^{\frac{1}{\alpha_i-1q}} S_\infty(\theta)_{i,j} [e_j]^{\frac{1}{\alpha_j-1q}} \right]_{i,j} \quad (2.79)$$

$$= \frac{1}{\theta \delta_0} V_\alpha(e) \quad (2.80)$$

D'après les deux équations précédentes, nous obtenons :

$$\dot{V}_\alpha(e) \leq -c_2(\alpha, \theta) [V_\alpha(e)]^{\frac{\frac{2}{q} + \alpha - 1}{2}} + c_3 V_\alpha(e) \quad (2.81)$$

où

$$c_3 = \frac{2n^2 l(u_0 + 1) m b S^{\frac{1}{2}}}{\alpha_{n-1} q \delta_0^{\frac{1}{2}}} \quad (2.82)$$

Domaine d'attraction de l'observateur

Soit K un compact de \mathbb{R}^n contenant l'origine. Nous pouvons choisir un réel $\epsilon > 0$ qui vérifie $\epsilon < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ tel que pour tout $\alpha \in [1 - \epsilon, 1)$ et pour un réel $\theta \geq \max\{\theta_1, \theta_2\}$, $c_2(\alpha, \theta)$ satisfasse :

$$c_2(\alpha, \theta) \geq \frac{\theta}{2} \quad (2.83)$$

D'après l'équation (2.81) et la proposition 2.3, le domaine d'attraction de l'observateur est contenu dans :

$$\Omega = \left\{ e : V_\alpha(e) < \left(\frac{c_2}{c_3} \right)^{\frac{2}{q(1-\alpha)}} \right\} \quad (2.84)$$

D'après les propriétés de c_2 , données par le lemme 2.5, et la forme spécifique de c_3 (donnée dans (2.82)), nous pouvons choisir $\theta \geq \max\{\theta_1, \theta_2\}$ tel que :

$$K \subset \left\{ e : S|e|_2 < \left(\frac{c_2}{c_3} \right)^{\frac{2}{q(1-\alpha)}} \right\} \quad (2.85)$$

Alors d'après l'inégalité (2.62) (obtenue dans le lemme 2.7) et d'après l'égalité (2.84), nous avons $K \subset \Omega$. Le système (2.41) admet donc un observateur semi global. \square

2.3.2.2 Construction de l'observateur global en temps fini

Nous allons maintenant construire un observateur global en temps fini pour les systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sum_{j=1}^m g_{1j}(x_1)u_j \\ \dot{x}_2 = x_3 + \sum_{j=1}^m g_{2j}(x_1, x_2)u_j \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m g_{nj}(x_1, \dots, x_n)u_j \\ y = x_1 = C_c x \end{cases} \quad (2.86)$$

De même que pour l'observateur de Shen et Xia, nous supposons que les fonctions φ et $g_{i,j}$ ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$) sont globalement Lipschitz de constante l . Les entrées u_j , $j = 1, \dots, m$, sont supposées bornées par un réel $u_0 \geq 0$. L'observateur considéré est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1(\lceil e_1 \rceil^{\alpha_1} + \rho e_1) + \sum_{j=1}^m g_{1j}(\hat{x}_1)u_j \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - k_2(\lceil e_1 \rceil^{\alpha_2} + \rho e_1) + \sum_{j=1}^m g_{2j}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)u_j \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n = -k_n(\lceil e_1 \rceil^{\alpha_n} + \rho e_1) + \varphi(\hat{x}) + \sum_{j=1}^m g_{nj}(\hat{x})u_j \end{cases} \quad (2.87)$$

où $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$, les puissances α_i sont définies comme dans le lemme 2.3. Les gains k_i ($i = 1, \dots, n$) sont définis par (2.46) et (2.47). Le gain ρ est défini par :

$$\rho = \left(\frac{n^2 \theta_3^{\frac{2}{3}} S_1 + 1}{2} \right) \quad (2.88)$$

avec :

$$S_1 = \max_{1 \leq i, j \leq n} |S_\infty(1)_{i,j}| \cdot |S_\infty^{-1}(1)_{j,1}| \quad (2.89)$$

Remarque 2.2. Un terme de correction linéaire est ajouté dans l'observateur (2.87) afin d'obtenir la convergence globale.

Le théorème suivant donne les conditions pour obtenir la convergence globale de l'observateur.

Théorème 2.6. *Ménard et al. (2010)* Considérons le système (2.86) avec une entrée u bornée par $u_0 \geq 0$. Alors il existe un réel $0 < \theta^* < \infty$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $\theta > \theta^*$ et $\alpha \in]1 - \varepsilon, 1[$, le système (2.86) admet le système (2.87) comme observateur en temps fini, global. De plus, le temps d'établissement $T(e_0)$ (où $e_0 = x_0 - \hat{x}_0$) du système d'erreur est borné par :

$$\frac{\ln \left(\frac{4r^2}{V(e_0)} \right)}{\kappa(\theta)} + \frac{\ln \left(1 - \frac{b_1}{b_2} (4r^2)^{1-\bar{\alpha}} \right)}{b_2(\bar{\alpha} - 1)} \quad (2.90)$$

Tous les paramètres ainsi que la fonction de Lyapunov V sont donnés dans la preuve du théorème.

Afin de prouver le théorème, nous avons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 2.8. *Les matrices $S_\infty(\theta)$ et $S_\infty^{-1}(\theta)$, définies par (2.47), vérifient les propriétés suivantes :*

$$S_\infty(\theta)_{i,j} = S_\infty(1)_{i,j} \frac{1}{\theta^{i+j-1}} \quad (2.91)$$

$$S_\infty^{-1}(\theta)_{i,j} = S_\infty^{-1}(1)_{i,j} \theta^{i+j-1} \quad (2.92)$$

pour tout $\theta > 0$ et $1 \leq i, j \leq n$.

La preuve est directe.

Lemme 2.9. ([Khalil, 2000](#), Lemme 2.5 p. 85) *soit $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse telle que :*

$$\dot{\sigma}(t) \leq k\sigma(t), \quad a \leq t \leq b$$

avec une constante $k \in \mathbb{R}$. Alors on a $\sigma(t) \leq \sigma(a)e^{-k(a-t)}$, pour $a \leq t \leq b$.

Démonstration du Théorème 2.6. Notons $e = x - \hat{x}$. En utilisant :

$$D(x, \hat{x}, u) = \Phi(\hat{x}) - \Phi(x) + \sum_{j=1}^m (g_j(\hat{x}) - g_j(x))u_j(t)$$

où $\Phi(x) = (0, \dots, 0, \varphi(x))$, $g_j = (g_{1j}, \dots, g_{nj})$, et :

$$F(K, e) = (k_1 \lceil e_1 \rceil^{\alpha_1}, \dots, k_n \lceil e_1 \rceil^{\alpha_n})^T, \quad K = (k_1, \dots, k_n)$$

les dynamiques de l'erreur sont données par :

$$\dot{e} = Ae - F(K, e) - \rho S_\infty^{-1}(\theta) C^T C e + D(x, \hat{x}, u) \quad (2.93)$$

La preuve de la convergence globale de l'observateur est divisée en deux parties. La première partie montre l'existence d'une "fonction de Lyapunov" V pour (2.93) qui est définie positive sur \mathbb{R}^n , radialement non bornée, et dont la dérivée est définie négative sur $P^r = \mathbb{R}^n - \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(r)$ (pour un $r > 1$). La deuxième partie montre que le système (2.93) est stable en temps fini à l'origine sur $\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r)$. La négativité de \dot{V} sur P^r et la stabilité en temps fini sur $\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r)$ montrent que le système (2.93) est globalement asymptotiquement stable et localement stable en temps fini à l'origine. Ce qui complète la preuve.

Partie 1 : En suivant la même méthodologie que [Gauthier et al. \(1992\)](#), nous considérons :

$$V(e) = e^T S_\infty(\theta) e$$

Pour tout $\theta > 0$, la fonction V est définie positive et radialement non bornée. D'après [Gauthier et al. \(1992\)](#), il existe une constante $\delta_\theta > 0$, telle que :

$$S_\infty(\theta) \geq \delta_\theta I_n$$

En utilisant (2.47) et (2.93), la dérivée de V le long des solutions de (2.93) est donnée par :

$$\frac{d}{dt}(e^T S_\infty(\theta)e) = -\theta e^T S_\infty(\theta)e - (2\rho - 1)(Ce)^2 - 2e^T S_\infty(\theta)F(K, e) + 2e^T S_\infty(\theta)D(x, \hat{x}, u)$$

Il suit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^T S_\infty(\theta)e) &\leq -\theta \|e\|_{S_\infty(\theta)}^2 - (2\rho - 1)(Ce)^2 \\ &\quad - 2e^T S_\infty(\theta)F(K, e) + 2\|e\|_{S_\infty(\theta)}\|D(x, \hat{x}, u)\|_{S_\infty(\theta)} \end{aligned}$$

Comme φ et g_{ij} ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$) sont des fonctions globalement Lipschitz de constante l et $\|u\|_\infty$ est borné par u_0 , en utilisant (2.91) et en suivant les mêmes calculs que dans [Gauthier et al. \(1992\)](#), nous obtenons :

$$\|D(x, \hat{x}, u)\|_{S_\infty(\theta)} \leq nl(u_0 + 1)mC_1\sqrt{S}\|e\|_{S_\infty(\theta)}$$

où $S = \max_{1 \leq i, j \leq n} |S_\infty(1)_{i,j}|$. Par équivalence des normes, il existe $C_1 > 0$ tel que :

$$\|x\|_{1,n} \leq C_1 \|x\|_{S_\infty(1)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.94)$$

Donc :

$$\frac{d}{dt}V(e) \leq (-\theta + M)V(e) - (2\rho - 1)(Ce)^2 - 2e^T S_\infty(\theta)F(K, e) \quad (2.95)$$

où $M = 2nl(u_0 + 1)mC_1\sqrt{S}$.

D'après (2.95), pour prouver que \dot{V} est négatif sur $P^r = \mathbb{R}^n - \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(r)$, nous utilisons une majoration de $e^T S_\infty(\theta)F(K, e)$. D'après le lemme 2.8, nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} e^T S_\infty(\theta)F(K, e) &= \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ n}} e_i \frac{(S_\infty(1))_{i,j}}{\theta^{i+j-1}} (S_\infty^{-1}(1))_{j,1} \theta^j [e_1]^{\alpha_j} \\ &= \sum_{j=1}^n (S_\infty^{-1}(1))_{j,1} [e_1]^{\alpha_j} \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\theta^{i-1}} (S_\infty(1))_{i,j} \end{aligned}$$

Nous majorons $e^T S_\infty(\theta)F(K, e)$ en deux étapes. Pour cela, l'ensemble P^r est découpé en deux parties complémentaires :

$$P_{<1}^r = \{e \in P^r : |e_1| < 1\}, \quad P_{\geq 1}^r = \{e \in P^r : |e_1| \geq 1\}$$

Sur $P_{<1}^r$, nous avons $|e_1|^{\alpha_i} < 1$, $i = 1, \dots, n$. D'où :

$$|e^T S_\infty(\theta)F(K, e)| \leq nS_1\theta \sum_{i=1}^n \left| \frac{e_i}{\theta^i} \right| \quad (2.96)$$

où S_1 est défini par (2.89). Soit $\xi_i = \frac{e_i}{\theta^i}$ pour $i = 1, \dots, n$, il vient :

$$|e^T S_\infty(\theta)F(K, e)| \leq nS_1\theta \|\xi\|_{1,n}$$

En utilisant (2.94) et $\|\xi\|_{S_\infty(1)}^2 = \frac{1}{\theta}\|e\|_{S_\infty(\theta)}^2$, nous obtenons

$$|e^T S_\infty(\theta) F(K, e)| \leq n S_1 C_1 \sqrt{\theta} \|e\|_{S_\infty(\theta)} \quad (2.97)$$

Soit $C_2 = n S C_1$. En prenant $r > 1$, alors $\|e\|_{S_\infty(\theta)} \leq \|e\|_{S_\infty(\theta)}^2$ pour $e \in P^r$, ainsi :

$$|e^T S_\infty(\theta) F(K, e)| \leq C_2 \sqrt{\theta} \|e\|_{S_\infty(\theta)}^2$$

Cela conduit à :

$$\frac{d}{dt} V(e) \leq \left(-\theta + M + C_2 \sqrt{\theta} \right) V(e) \quad (2.98)$$

Sur $P_{\geq 1}^r$, nous avons $|e_1| \geq 1$ d'où $|e_1|^{\alpha_i} \leq |e_1|$ pour $i = 1, \dots, n$. Donc :

$$\begin{aligned} |e^T S_\infty(\theta) F(K, e)| &\leq n S_1 \theta \sum_{i=1}^n \left| \frac{e_i}{\theta^i} \right| \cdot |e_1| \\ &= n S_1 \sum_{i=1}^n \left(\theta^{\frac{2}{3}} \left| \frac{e_i}{\theta^i} \right| \right) \left(\theta^{\frac{1}{3}} |e_1| \right) \\ &\leq \frac{n S_1 \theta^{\frac{4}{3}}}{2} \|\xi\|_{2,n}^2 + \frac{n^2 \theta^{\frac{2}{3}} S_1}{2} |e_1|^2 \end{aligned}$$

Mais $\|\xi\|_{2,n}^2 \leq C_3 \|\xi\|_{S_\infty(1)}^2$ (par équivalence des normes) et $\|\xi\|_{S_\infty(1)}^2 = \frac{1}{\theta} \|e\|_{S_\infty(\theta)}^2$, d'où :

$$|e^T S_\infty(\theta) F(K, e)| \leq C_4 \theta^{\frac{1}{3}} \|e\|_{S_\infty(\theta)}^2 + \frac{n^2 \theta^{\frac{2}{3}} S_1}{2} |e_1|^2 \quad (2.99)$$

où $C_4 = \frac{n S_1 C_3}{2}$. En combinant (2.95) et (2.99), nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} V(e) \leq \left(-\theta + M + 2 C_4 \theta^{\frac{1}{3}} \right) V(e) \quad (2.100)$$

En combinant les deux inégalités (2.98) et (2.100), avec $r > 1$, il existe $\theta_1 > 0$ tel que pour tout $\theta \geq \theta_1$, $\frac{d}{dt} V(e) < 0$, pour tout $e \in P^r$ et plus précisément :

$$\frac{d}{dt} V(e) \leq \kappa(\theta) V(e) \quad (2.101)$$

où :

$$\kappa(\theta) = \max \left\{ (-\theta + M + 2 C_4 \theta^{\frac{1}{3}}), (-\theta + M + C_2 \sqrt{\theta}) \right\} \quad (2.102)$$

Ainsi, en appliquant le lemme 2.9 à l'inégalité (2.101), nous obtenons :

$$V(e(t)) \leq V(e_0) e^{\kappa(\theta)t} \quad (2.103)$$

Comme nous nous intéressons aux trajectoires qui rentrent dans $\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r)$, il est suffisant d'avoir $V(e_0) e^{\kappa(\theta)t} \leq 4r^2$ ou de manière équivalente $t \geq \frac{\ln\left(\frac{4r^2}{V(e_0)}\right)}{\kappa(\theta)}$. Nous obtenons

une majoration de $T_1(e_0)$, le temps pour qu'une trajectoire partant de e_0 entre dans $\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r)$, par :

$$T_1(e_0) \leq \frac{\ln\left(\frac{4r^2}{V(e_0)}\right)}{\kappa(\theta)} \quad (2.104)$$

Partie 2 : La preuve de la stabilité en temps fini des dynamiques de l'erreur (2.93) sur $\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r)$ est séparée en deux étapes : premièrement, nous montrons que la partie linéaire contribue à la convergence de l'erreur et deuxièmement, la stabilité en temps fini sur ce compact est obtenue en suivant la même méthodologie que dans [Shen et Xia \(2008\)](#) pour le cas semi-global.

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$\tilde{V}_\alpha(e) = \tilde{e}^T S_\infty(\theta) \tilde{e}$$

où $\tilde{e} = \left(\lceil e_1 \rceil^{\frac{1}{q}} \lceil e_2 \rceil^{\frac{1}{\alpha_1 q}} \dots \lceil e_n \rceil^{\frac{1}{\alpha_{n-1} q}} \right)$, $q = \prod_{i=1}^{n-1} [(i-1)\alpha - (i-2)]$ est le produit des poids.

La fonction \tilde{V}_α est homogène de degré $\frac{2}{q}$ avec les poids $\{(i-1)\alpha - (i-2)\}_{1 \leq i \leq n}$. La fonction \tilde{V}_α est définie positive et radialement non bornée. En effet, d'après [Gauthier et al. \(1992\)](#), pour tout $\theta > 0$, il existe δ_θ tel que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{V}_\alpha(x) = \tilde{x}^T S_\infty(\theta) \tilde{x} \geq \delta_\theta \tilde{x}^T \tilde{x} = \delta_\theta \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{2}{\alpha_{i-1} q}}$$

et $\frac{2}{\alpha_{i-1} q} > 0$, for $i = 1, \dots, n$. Nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \tilde{V}_\alpha(e) = W_1 + W_2 + W_3$$

où :

$$\begin{aligned} W_1 &= 2\tilde{e}^T S_\infty(\theta) \begin{pmatrix} \frac{1}{q} |e_1|^{\frac{1}{q}-1} (\frac{1}{2} e_2 - k_1 \lceil e_1 \rceil^{\alpha_1}) \\ \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1} q} |e_{n-1}|^{\frac{1}{\alpha_{n-2} q}-1} (\frac{1}{2} e_n - k_{n-1} \lceil e_1 \rceil^{\alpha_{n-1}}) \\ \frac{1}{\alpha_n q} |e_n|^{\frac{1}{\alpha_{n-1} q}-1} (-k_n \lceil e_1 \rceil^{\alpha_n}) \end{pmatrix} \\ W_2 &= 2\tilde{e}^T S_\infty(\theta) \begin{pmatrix} \frac{1}{q} |e_1|^{\frac{1}{q}-1} (\frac{1}{2} e_2 - \rho k_1 e_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1} q} |e_{n-1}|^{\frac{1}{\alpha_{n-2} q}-1} (\frac{1}{2} e_n - \rho k_{n-1} e_1) \\ \frac{1}{\alpha_n q} |e_n|^{\frac{1}{\alpha_{n-1} q}-1} (-\rho k_n e_1) \end{pmatrix} \\ W_3 &= 2\tilde{e}^T S_\infty(\theta) \begin{pmatrix} \frac{1}{q} |e_1|^{\frac{1}{q}-1} D_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-2} q} |e_{n-1}|^{\frac{1}{\alpha_{n-2} q}-1} D_{n-1} \\ \frac{1}{\alpha_{n-1} q} |e_n|^{\frac{1}{\alpha_{n-1} q}-1} D_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Majoration de W_1 : ce terme est homogène, le lemme 4.2 dans [Bhat et Bernstein \(2005\)](#) donne :

$$W_1 \leq -b_1(\alpha, \theta) \left(\tilde{V}_\alpha(e) \right)^{\frac{\frac{2}{q} + \alpha - 1}{\frac{2}{q}}}$$

où b_1 vérifie $\lim_{\alpha \rightarrow 1} b_1(\alpha, \theta) = \frac{\theta}{2}$ (d'après le lemme 2.5).

Majoration de W_2 : on utilise le lemme 2.4 comme dans la démonstration du théorème 2.4 ([Perruquetti et al. \(2008\)](#)). Comme V est propre, $\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r)$ est un compact de \mathbb{R}^n . Définissons la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r) \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(\alpha, e) = W_2$$

En utilisant la même technique que dans [Gauthier et al. \(1992\)](#), nous prouvons que $\varphi(1, e) < 0$ pour $e \in \mathbb{R}^n$. Comme φ est continue, $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_-)$ est un ouvert de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r)$ contenant la tranche $\{1\} \times \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r)$. Comme $\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r)$ est un compact, d'après le lemme 2.4, $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_-)$ contient un tube $(1 - \mu_1, 1 + \mu_2) \times \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r)$ de $\{1\} \times \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r)$. Pour tout $(\alpha, e) \in (1 - \mu_1, 1 + \mu_2) \times \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r)$ nous avons $\varphi(\alpha, e) < 0$. Donc il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour tout $\alpha \in (1 - \varepsilon_1, 1)$ on ait $W_2 \leq 0$.
Majoration de W_3 : en remarquant que $\frac{d}{dt} [e_i]^{\alpha_i} = \alpha_i |e_i|^{\alpha_i - 1}$, nous obtenons :

$$W_3 \leq 2l(u_0 + 1)m (\tilde{e}^T S_\infty(\theta) \tilde{e})^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{|S_\infty(1)_{i,j}|}{\theta^{i+j-1}} \frac{|e_i|^{\frac{1}{\alpha_{i-1}q} - 1} \sum_{k=1}^i |e_k|}{\alpha_{i-1}q} \times \frac{|e_j|^{\frac{1}{\alpha_{j-1}q} - 1} \sum_{k=1}^j |e_k|}{\alpha_{j-1}q} \right)^{\frac{1}{2}}$$

En utilisant l'inégalité de Young :

$$|x||y|^{p-1} \leq \frac{1}{p}|x|^p + \frac{p-1}{p}|y|^p, \quad \forall x, y > 0, \quad \forall p > 0 \quad (2.105)$$

Nous avons :

$$|e_k||e_i|^{\frac{1}{\alpha_{i-1}q} - 1} \leq \alpha_{i-1}q |e_k|^{\frac{1}{\alpha_{i-1}q}} + (1 - \alpha_{i-1}q) |e_i|^{\frac{1}{\alpha_{i-1}q}} \quad (2.106)$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^i |e_i|^{\frac{1}{\alpha_{i-1}q} - 1} |e_k| &\leq \sum_{k=1}^i \left((1 - \alpha_{i-1}q) |e_i|^{\frac{1}{\alpha_{i-1}q}} + \alpha_{i-1}q |e_k|^{\frac{1}{\alpha_{i-1}q}} \right) \\ &\triangleq \sum_{k=1}^i b_{i,k} |e_k|^{\frac{1}{\alpha_{i-1}q}} \end{aligned}$$

où $b_{i,k} > 0$. Soit $b = \max_{i,k} b_{i,k}$, on a :

$$W_3 \leq \frac{2bl(u_0 + 1)m S^{\frac{1}{2}} \theta^{\frac{1}{2}}}{\alpha_{n-1}q} \times (\tilde{V}_\alpha(e))^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^i \frac{e_k^{\frac{2}{\alpha_{k-1}q}}}{\theta^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^j \frac{e_k^{\frac{2}{\alpha_{k-1}q}}}{\theta^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'après le lemme 2.7, il existe θ_2 tel que pour $\theta \geq \theta_2 \geq 1$, et pour tout $i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, i$, on ait :

$$\frac{|e_k(t)|^{\frac{1}{\alpha_{i-1}q}}}{\theta^i} \leq \frac{|e_k(t)|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}q}}}{\theta^k} \quad (2.107)$$

Donc, en utilisant $\xi_k = \frac{\lceil e_k \rceil^{\frac{1}{\alpha_{k-1}q}}}{\theta^k}$, nous obtenons :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^i \frac{e_k^{\frac{2}{\alpha_{k-1}q}}}{\theta^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^j \frac{e_k^{\frac{2}{\alpha_{k-1}q}}}{\theta^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq n^2 \sum_{k=1}^n \xi_k^2$$

D'après [Gauthier et al. \(1992\)](#), il existe $\delta_1 > 0$ tel que :

$$S_\infty(1) \geq \delta_1 I$$

En utilisant $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \xi_k^2 &\leq \frac{1}{\delta_1} \xi^T S_\infty(1) \xi \\ &\leq \frac{1}{\theta \delta_1} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\lceil e_i \rceil^{\frac{1}{\alpha_{i-1}q}} \frac{S(1)_{i,j}}{\theta^{i+j-1}} \lceil e_j \rceil^{\frac{1}{\alpha_{j-1}q}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\theta \delta_1} \tilde{V}_\alpha(e) \end{aligned}$$

Donc :

$$W_3 \leq \frac{2bl(u_0+1)mn^2 S^{\frac{1}{2}}}{\alpha_{n-1}q\delta_1^{\frac{1}{2}}} \tilde{V}_\alpha(e) \quad (2.108)$$

Finalement, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \tilde{V}_\alpha(e)_{(2.93)} \leq -b_1(\alpha, \theta) \left(\tilde{V}_\alpha \right)^{\frac{\frac{2}{q} + \alpha - 1}{\frac{2}{q}}} + b_2(\alpha) \tilde{V}_\alpha(e) \quad (2.109)$$

où $b_2(\alpha) = \frac{2bl(u_0+1)mn^2 S^{\frac{1}{2}}}{\alpha_{n-1}q\delta_1^{\frac{1}{2}}}$. Par l'inégalité (2.109) et le théorème 2.5, le domaine d'attraction de l'observateur est donné par :

$$\Omega = \left\{ e : \tilde{V}_\alpha(e) < \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^{\frac{2}{q(1-\alpha)}} \right\} \quad (2.110)$$

En combinant l'équation (2.110) et l'inégalité $\tilde{V}_\alpha(e) \leq e_0^T S_\infty(\theta) e_0$ (d'après le lemme 2.7), nous obtenons :

$$\mathcal{U} = \left\{ e : V(e) = e^T S_\infty(\theta) e < \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^{\frac{2}{q(1-\alpha)}} \right\} \subset \Omega \quad (2.111)$$

Comme $\lim_{\alpha \rightarrow 1} b_1(\alpha, \theta) = \frac{\theta}{2}$, il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que :

$$b_1(\alpha, \theta) \geq \frac{\theta}{4}, \quad \text{pour } \alpha \in]1 - \varepsilon_2, 1[$$

Ainsi, pour $\alpha \in (1 - \varepsilon_2, 1)$, nous avons :

$$\frac{b_1}{b_2} \rightarrow +\infty, \quad \theta \rightarrow \infty, \quad \text{pour } \alpha \in]1 - \varepsilon_2, 1[\quad (2.112)$$

En considérant (2.111) et (2.112), il existe $\theta_3 > 0$ tel que pour tout $\theta \geq \theta_3$:

$$\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{S_\infty(\theta)}}(2r) \subset \Omega$$

Ce qui termine la preuve de la stabilité.

Finalement, on pose $\theta^* = \max\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ et $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. D'après l'équation (2.109) et le lemme 2.3, pour une trajectoire partant de Ω en e_0 , l'inégalité suivante est obtenue sur le temps d'établissement :

$$T_2(e_0) \leq \frac{\ln \left(1 - \frac{b_1}{b_2} \tilde{V}_\alpha^{1-\bar{\alpha}} \right) (e_0)}{b_2(\bar{\alpha} - 1)} \quad (2.113)$$

où $\bar{\alpha} = \frac{\frac{2}{q} + \alpha - 1}{\frac{2}{q}}$. D'après le lemme 2.7 :

$$\tilde{V}_\alpha(e_0) \leq e_0^T S_\infty(\theta) e_0 \quad (2.114)$$

Un calcul direct donne :

$$T_2(e_0) \leq \frac{\ln \left(1 - \frac{b_1}{b_2} (4r^2)^{1-\bar{\alpha}} \right)}{b_2(\bar{\alpha} - 1)} \quad (2.115)$$

En combinant (2.104) et (2.115), nous obtenons la majoration suivante sur le temps d'établissement de l'observateur (2.87) :

$$T(e_0) \leq \frac{\ln \left(\frac{4r^2}{V(e_0)} \right)}{\kappa(\theta)} + \frac{\ln \left(1 - \frac{b_1}{b_2} (4r^2)^{1-\bar{\alpha}} \right)}{b_2(\bar{\alpha} - 1)}$$

□

2.3.3 Exemples

2.3.3.1 Premier exemple

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1 \sin(x_2) \\ \dot{x}_3 = \sin(x_1 + x_2 + x_3) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.116)$$

qui est déjà sous forme canonique observable (2.86). Nous considérons ici l'observateur suivant qui correspond à (2.87) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 - k_1(\lceil e_1 \rceil^\alpha + \rho e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + \hat{x}_1 \sin(\hat{x}_2) - k_2(\lceil e_1 \rceil^{2\alpha-1} + \rho e_1) \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \sin(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3) - k_3(\lceil e_1 \rceil^{3\alpha-2} + \rho e_1) \end{cases} \quad (2.117)$$

Les gains sont donnés par :

$$k_1 = 2\theta, k_2 = 2\theta^2, k_3 = \theta^3 \quad (2.118)$$

et :

$$\rho = \frac{(81\theta^{\frac{2}{3}} + 1)}{2} \quad (2.119)$$

Les simulations sont données dans deux cas. Premièrement la simulation est réalisée directement avec le signal de sortie du système (2.116) sans bruit. La seconde simulation est réalisée avec un bruit blanc sur le signal de sortie (le bruit blanc a pour caractéristique une corrélation de 0.01 et une covariance de 0.05). Les deux simulations sont réalisées pour différentes valeurs de α et θ .

Comme nous pouvons le constater sur les figures 2.1-2.2, la sélection du gain est sensible au bruit comme pour tout observateur à grand gain. Au contraire, le paramètre α ne semble pas être très sensible au bruit.

Dans le cas d'une sortie sans bruit, nous pouvons constater sur les figures 2.3-2.4 que la convergence en temps fini a bien lieu, pour une valeur de α assez proche de 1.

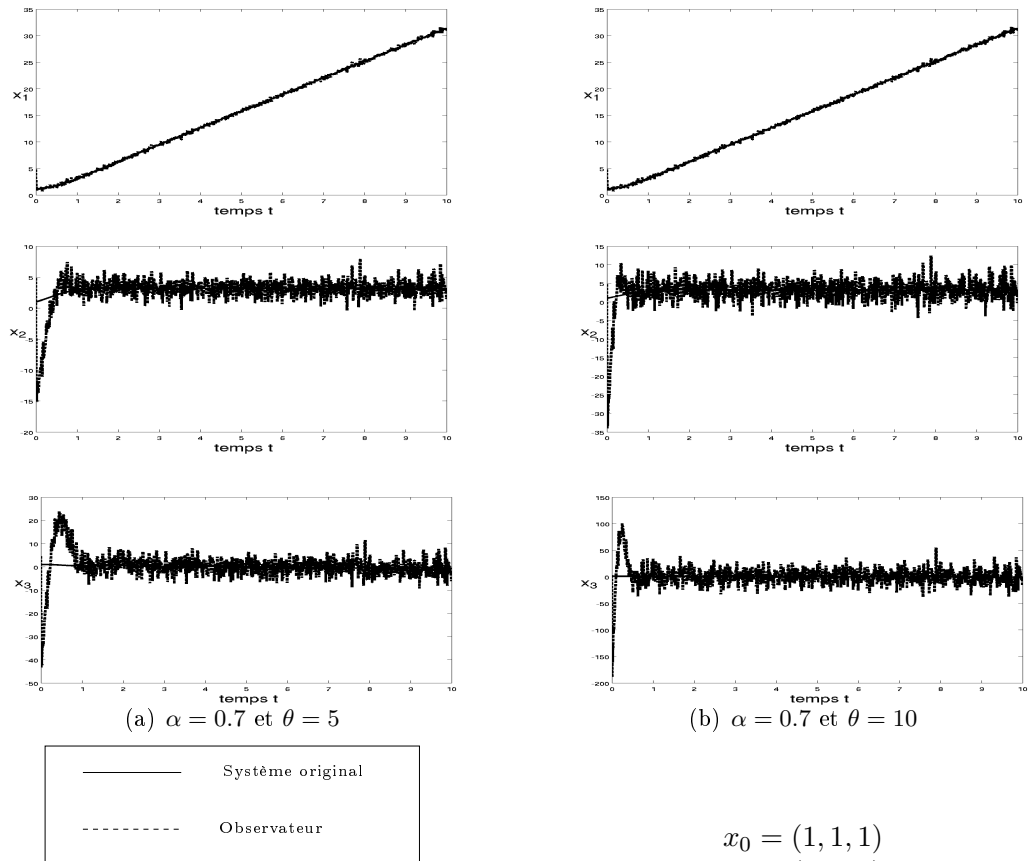


Figure 2.1 – États et estimées avec bruits

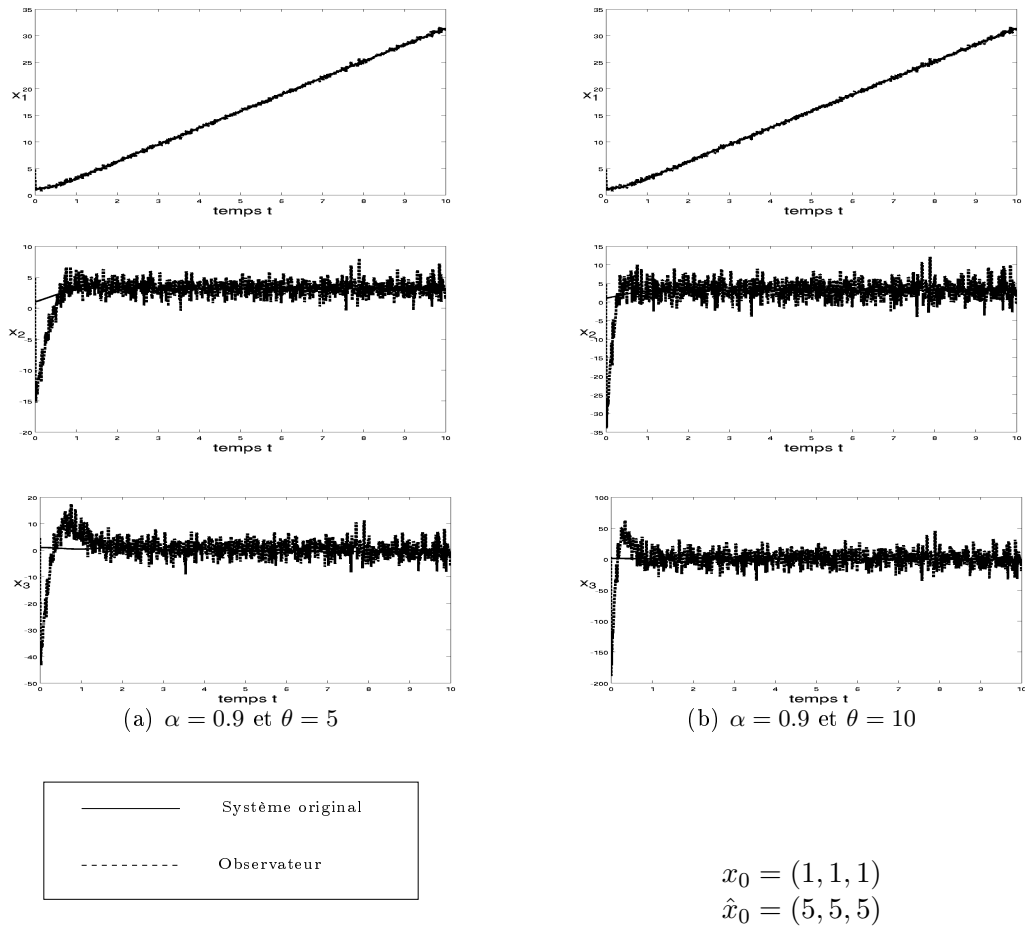


Figure 2.2 – États et estimées avec bruits

2.3.3.2 Deuxième exemple

Pour cet exemple, nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = -10x_4 - 6x_5 \end{cases} \quad (2.120)$$

qui correspond à un système sans entrée. L'observateur (2.87) est donné dans ce cas par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1(\lceil e_1 \rceil^\alpha + \rho e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - k_2(\lceil e_1 \rceil^{2\alpha-1} + \rho e_1) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_4 - k_3(\lceil e_1 \rceil^{3\alpha-2} + \rho e_1) \\ \dot{\hat{x}}_4 = \hat{x}_5 - k_4(\lceil e_1 \rceil^{4\alpha-3} + \rho e_1) \\ \dot{\hat{x}}_5 = -10\hat{x}_4 - 6\hat{x}_5 - k_5(\lceil e_1 \rceil^{5\alpha-4} + \rho e_1) \end{cases} \quad (2.121)$$

L'observateur semi global (2.44) de [Shen et Xia \(2008\)](#) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1 \lceil e_1 \rceil^\alpha \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - k_2 \lceil e_1 \rceil^{2\alpha-1} \\ \dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_4 - k_3 \lceil e_1 \rceil^{3\alpha-2} \\ \dot{\hat{x}}_4 = \hat{x}_5 - k_4 \lceil e_1 \rceil^{4\alpha-3} \\ \dot{\hat{x}}_5 = -10\hat{x}_4 - 6\hat{x}_5 - k_5 \lceil e_1 \rceil^{5\alpha-4} \end{cases} \quad (2.122)$$

L'observateur à grand gain classique de [Gauthier et al. \(1992\)](#) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1 e_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - k_2 e_1 \\ \dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_4 - k_3 e_1 \\ \dot{\hat{x}}_4 = \hat{x}_5 - k_4 e_1 \\ \dot{\hat{x}}_5 = -10\hat{x}_4 - 6\hat{x}_5 - k_5 e_1 \end{cases} \quad (2.123)$$

Les gains sont donnés par :

$$k_1 = 5\theta, k_2 = 10\theta^2, k_3 = 10\theta^3, k_4 = 5\theta^4, k_5 = \theta^5 \quad (2.124)$$

et :

$$\rho = \frac{(81\theta^{\frac{2}{3}} + 1)}{2} \quad (2.125)$$

Les résultats de simulations sont présentés dans la figure 2.6 pour l'observateur global en temps fini (2.121), dans 2.5 pour l'observateur asymptotique global de [Gauthier et al. \(1992\)](#) et dans la figure 2.7 pour l'observateur semi-global en temps fini de [Shen et Xia \(2008\)](#).

2.4 Conclusion

La première partie de ce chapitre a été consacrée au rappel de la définition de la stabilité en temps fini, ainsi qu'aux différentes conditions suffisantes utilisant l'homogénéité et des fonctions de Lyapunov pour obtenir la stabilité en temps fini.

Dans la seconde partie, nous avons d'abord rappelé les résultats antérieurs sur la synthèse d'observateurs en temps fini. Ensuite, nous avons construit un observateur global en temps fini pour la classe des systèmes uniformément observable, globalement Lipschitz et à entrée bornée. Ce résultat est une extension de l'observateur semi-global conçu dans [Shen et Xia \(2008\)](#). En effet, dans [Shen et Xia \(2008\)](#), l'observateur construit n'est que semi-global, la convergence n'est assurée que sur un compact. Il faut augmenter le gain pour élargir le domaine d'attraction. Notre observateur permet de régler le gain une fois pour toutes, et la convergence est assurée sur tout l'espace d'état. De plus, les gains utilisés ici sont issus d'une équation de Riccati comme dans l'observateur de [Gauthier et al. \(1992\)](#), et sont donc simples à calculer. Ce résultat a fait l'objet de deux publications dans [Ménard et al. \(2009\)](#) et [Ménard et al. \(2010\)](#).

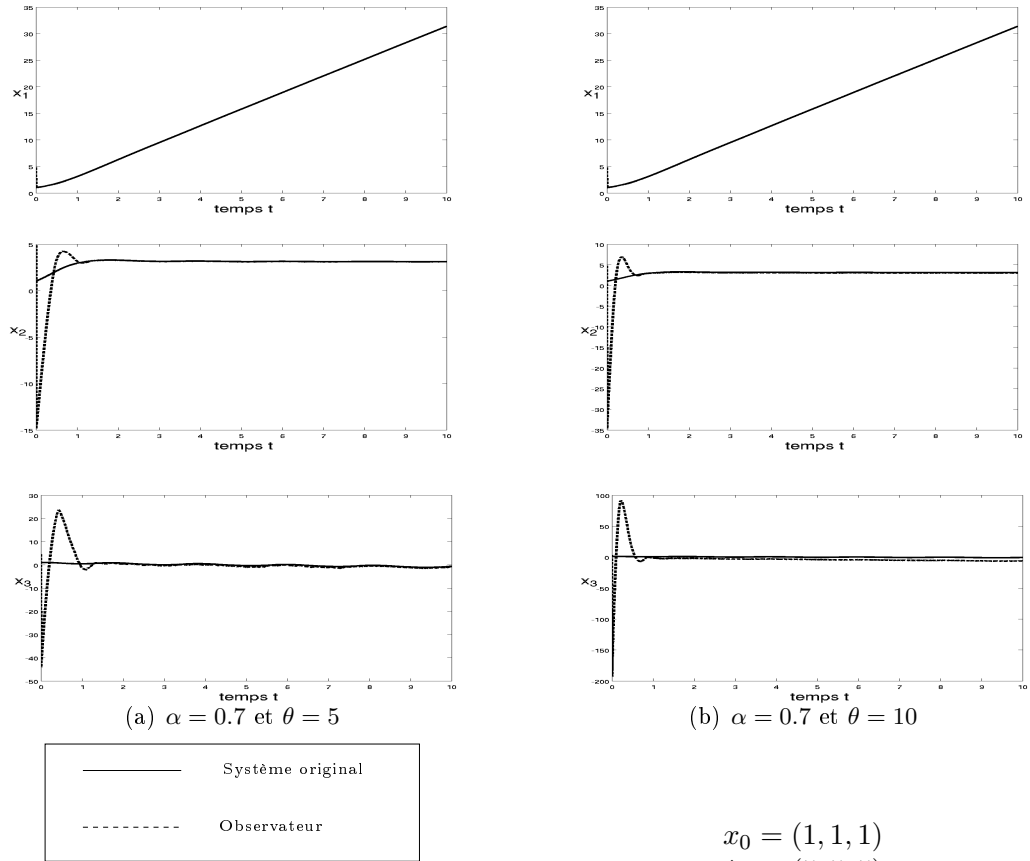
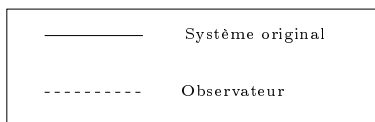
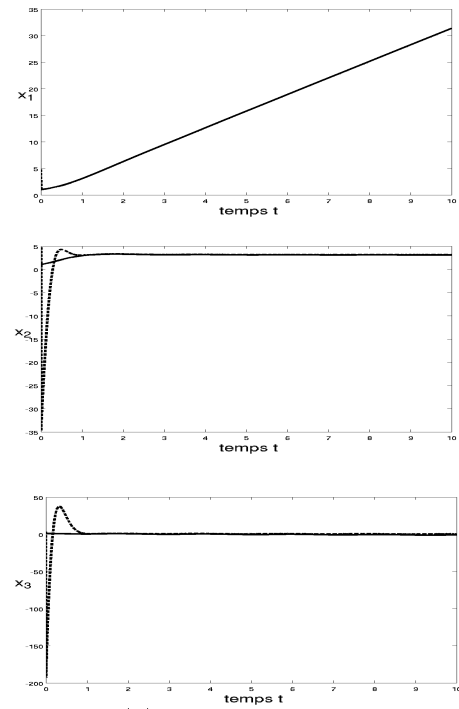
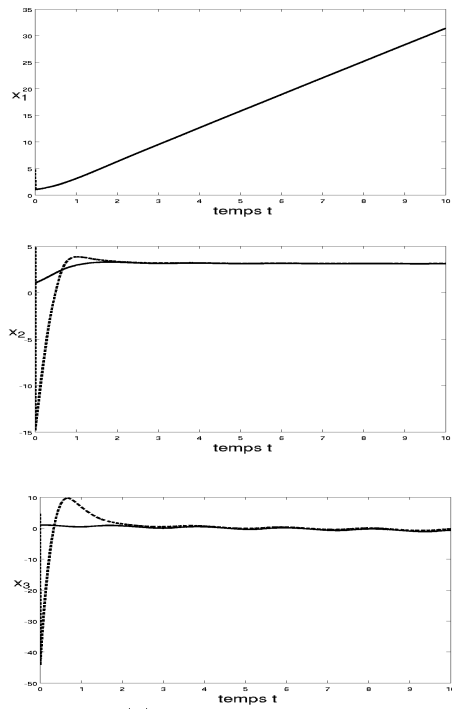


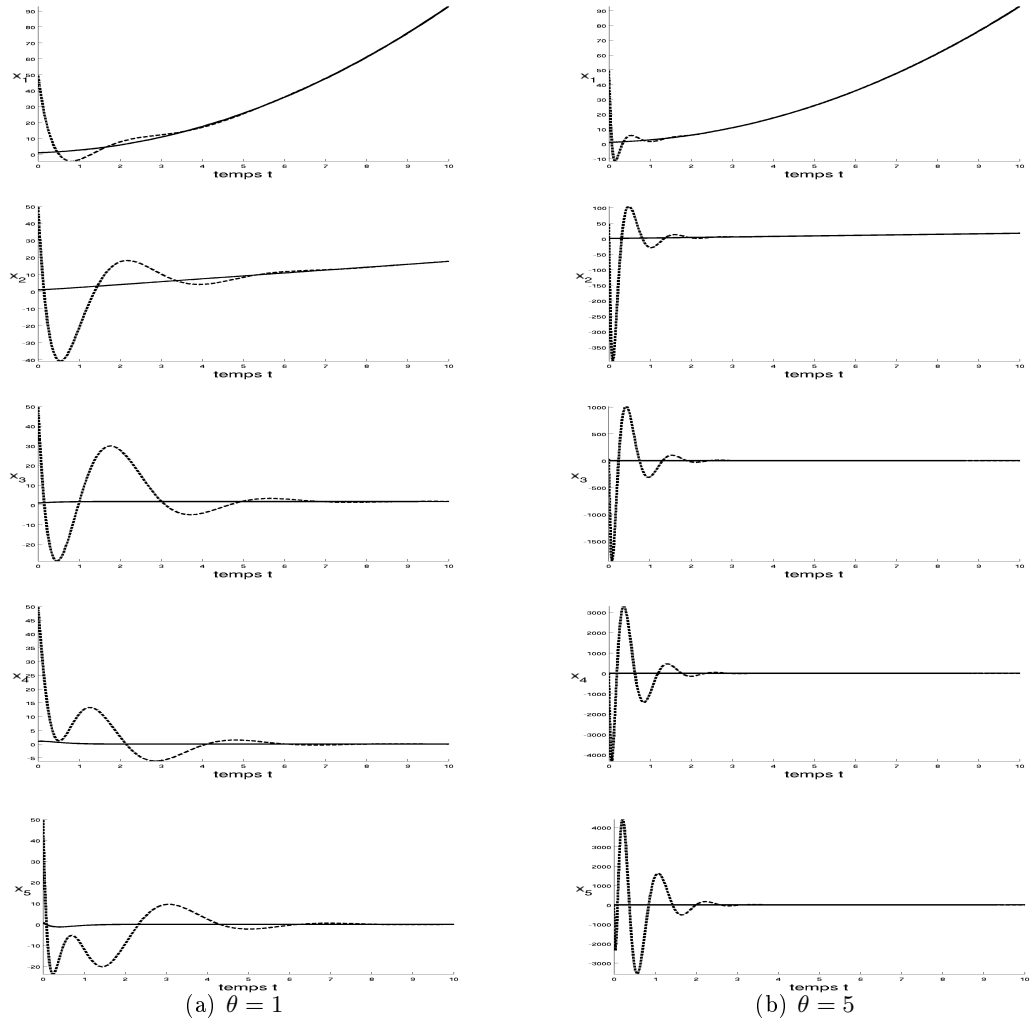
Figure 2.3 – États et estimées sans bruits



$$x_0 = (1, 1, 1)$$

$$\hat{x}_0 = (5, 5, 5)$$

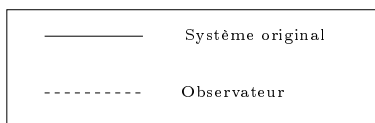
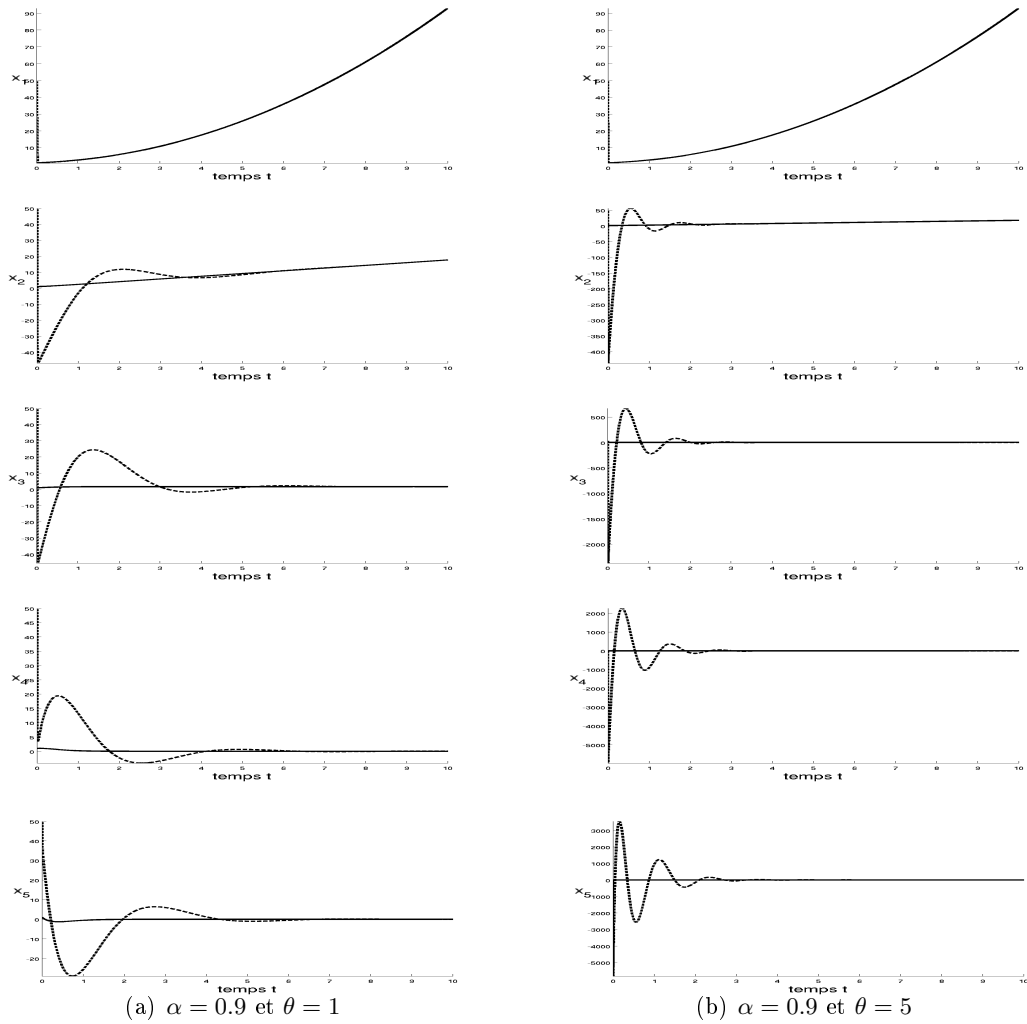
Figure 2.4 – États et estimées sans bruits



$$x_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\hat{x}_0 = (50, 50, 50, 50, 50)$$

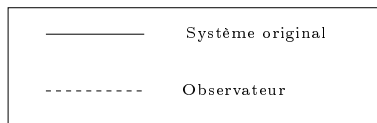
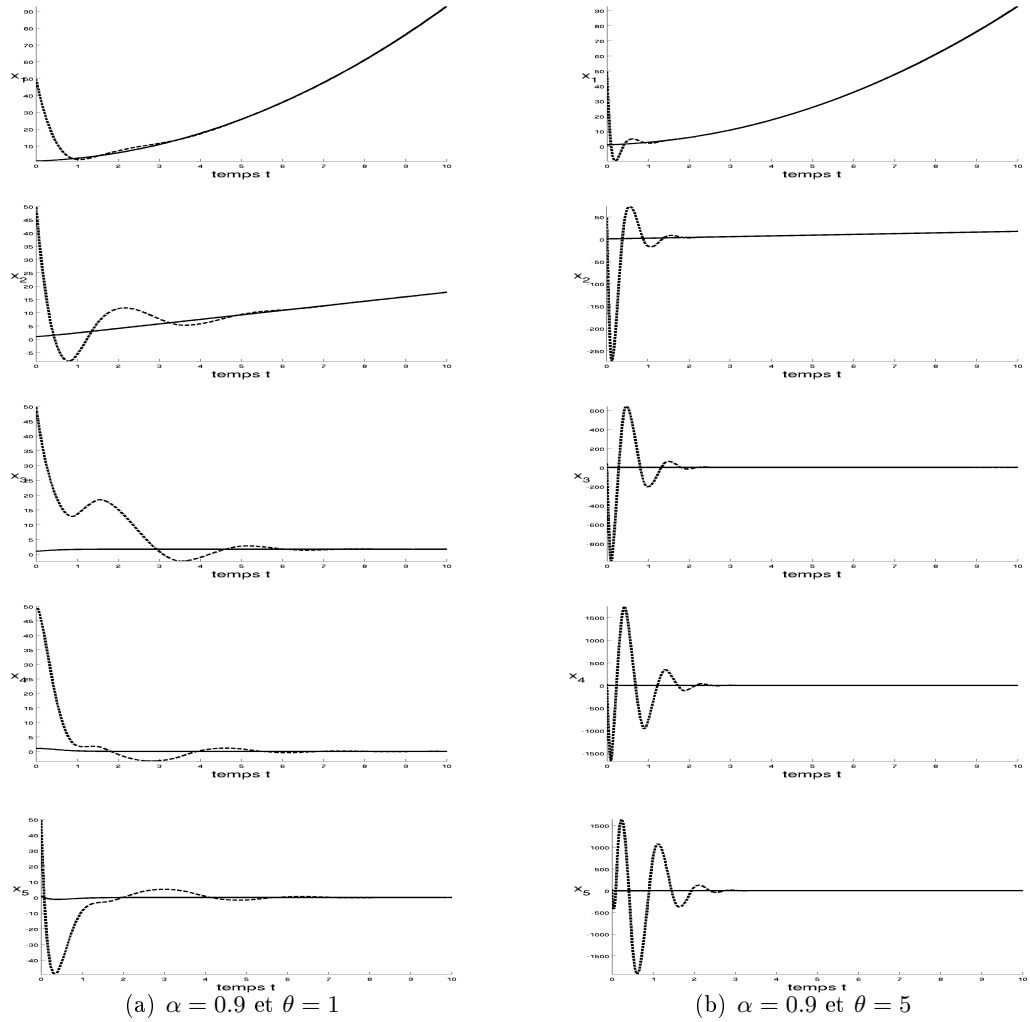
Figure 2.5 – Observateur asymptotique global Gauthier



$$x_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\hat{x}_0 = (50, 50, 50, 50, 50)$$

Figure 2.6 – Observateur global temps fini



$$x_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\hat{x}_0 = (50, 50, 50, 50, 50)$$

Figure 2.7 – Observateur semi-global temps fini

CHAPITRE 3

CONSTRUCTION D'UNE APPROXIMATION HOMOGÈNE POUR LE PROBLÈME DE L'OBSERVABILITÉ

Sommaire

3.1	Introduction	68
3.2	Approximation homogène pour le problème de la contrôlabilité	68
3.2.1	Ordre d'une fonction et d'un champ de vecteurs	69
3.2.2	Filtration, dilatation et changement de coordonnées	71
3.2.3	Propriété des nouvelles coordonnées	72
3.2.4	Construction et propriétés de l'approximation	75
3.3	Approximation homogène pour le problème de l'observabilité	77
3.3.1	Changement de coordonnées	77
3.3.2	Propriétés du système dans les nouvelles coordonnées	82
3.3.3	Construction de l'approximation pour l'observabilité	85
3.4	Exemples	87
3.4.1	Premier exemple	87
3.4.2	Deuxième exemple	89
3.5	Conclusion	92

3.1 Introduction

La construction d'observateurs pour les systèmes non linéaires est en général difficile, c'est pourquoi de nombreuses approches ont été développées. Pour la majorité des systèmes non linéaires, il n'existe pas d'observateur pouvant être implémenté directement sans transformer le système. C'est pourquoi l'étude des transformations qui permettent de transformer un système observable sous une forme où la construction d'un observateur est possible a été largement développée au cours de ces trente dernières années. Comme nous l'avons vu dans la section 1.3.2, une des premières idées a été de transformer le système en un système linéaire pour lequel un observateur de Luenberger peut être implémenté (voir [Krener et Isidori \(1983\)](#)). Malheureusement, les conditions d'existence d'une telle transformation sont très restrictives, et même dans le cas où les conditions sont satisfaites, le calcul effectif de cette transformation peut être très lourd (voir [Phelps \(1991\)](#)). Des transformations en des classes de systèmes plus générales, qui sont composés d'une partie linéaire spécifique et d'une partie non linéaire, ont également été étudiées (voir [Souleiman *et al.* \(2003\)](#); [Besançon et Ticlea \(2007\)](#); [Nam \(1997\)](#)), mais l'existence de tels systèmes ne sont pas génériques. Une façon de relaxer les hypothèses pour l'existence d'une transformation facilitant la construction d'un observateur est de construire simplement une approximation pour le champ de vecteurs et la fonction de sortie. L'approximation la plus simple possible est fournie par une linéarisation du système. Le problème de cette approche est que les termes que l'on garde correspondent à un ordre défini arbitrairement, qui n'est pas induit directement par l'espace d'observabilité. Nous allons construire ici une approximation qui permet de garder exactement les informations relatives à l'observabilité en un point. Plus particulièrement, nous considérons un système non linéaire sans entrée qui satisfait la condition du rang en un point. Le but est de construire une approximation homogène ayant le même espace d'observabilité que le système original au point considéré. L'utilisation de l'homogénéité est la clef de voûte de cette construction. En effet, l'homogénéité est une généralisation de la notion de degré des polynômes (voir l'annexe C). Une telle méthodologie a déjà été mise en place pour le problème du contrôle. Pour un système complètement accessible, la construction d'une approximation homogène ayant le même espace de contrôlabilité est possible (voir [Hermes \(1986\)](#); [Bianchini et Stefani \(1990\)](#)).

Dans ce chapitre, nous rappelons tout d'abord la construction d'une approximation homogène pour un système affine en la commande vérifiant une condition d'accessibilité complète. Nous montrerons ensuite comment construire une approximation homogène pour un système sans entrée vérifiant la condition d'observabilité du rang. Finalement, nous donnerons quelques exemples de la construction d'une telle approximation.

3.2 Approximation homogène pour le problème de la contrôlabilité

La construction d'approximations pour des équations différentielles est généralement déduite d'une forme normale. L'utilisation des formes normales a été initiée par Henri

Poincaré (voir [Poincaré \(1899, reedition 1987, A. Blanchard\)](#); [Arnold \(1988\)](#)), et a été appliquée à la théorie du contrôle avec succès, à la fois pour le problème de la contrôlabilité et de l'observabilité. La construction d'approximations homogènes pour des systèmes contrôlés a été étudiée par de nombreux auteurs (voir [Bianchini et Stefani \(1990\)](#); [Hermes \(1982, 1986, 1991\)](#); [Stefani \(1985\)](#); [Sussmann \(1987\)](#)), cette méthodologie est issue de l'étude des opérateurs hypoelliptiques (voir [Goodman \(1976\)](#); [Rothschild et Stein \(1976\)](#)). Les systèmes considérés sont de la forme :

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{j=1}^m u_j f_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, m \quad (3.1)$$

et l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs f_0, \dots, f_m est supposée être de rang n à l'origine. Une filtration est construite sur cette algèbre, qui permet d'obtenir un changement de coordonnées. L'approximation est ensuite construite en prenant les premiers termes du développement homogène par rapport à une dilatation donnée.

3.2.1 Ordre d'une fonction et d'un champ de vecteurs

La notion d'ordre pour une fonction est définie en regardant quel est le premier terme non nul dans le développement de Taylor de cette fonction. Nous allons voir ici qu'il est possible de définir une notion d'ordre relative à une dilatation donnée. Ceci nous permettra de définir une approximation de façon plus libre qu'avec l'ordre standard. Soit h une fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, comme h est analytique, il existe un voisinage \mathcal{U} de l'origine sur lequel h se développe en une somme de fonctions homogènes pour une dilatation donnée δ_ϵ^r , $r \in \mathbb{N}^n$, i.e. :

$$h(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} h_l(x), \quad \forall x \in \mathcal{U} \quad (3.2)$$

où chaque h_l est une fonction de $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ homogène de degré l par rapport à δ_ϵ^r . En effet, la fonction h est analytique, donc on peut écrire h comme une somme infinie de polynômes, or chaque monôme est homogène de degré $d \in \mathbb{N}$, par rapport à δ_ϵ^r . On peut donc réorganiser les termes pour obtenir l'égalité (3.2).

Le même résultat existe pour les champs de vecteurs de $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$. Soit $f \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$, il existe un voisinage \mathcal{U} de l'origine tel que :

$$f(x) = \sum_{l=-\max_i r_i}^{+\infty} f_l(x), \quad \forall x \in \mathcal{U} \quad (3.3)$$

où chaque f_l est un champ de vecteurs $\mathcal{V}(\mathcal{U})$ homogène de degré l par rapport à δ_ϵ^r , $r \in \mathbb{N}^n$.

Définition 3.1. [Bianchini et Stefani \(1990\)](#) Soit δ_ϵ^r une dilatation (avec $r \in \mathbb{N}^n$) et $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Considérons le développement homogène de h par rapport à δ_ϵ^r sur un voisinage

\mathcal{U} de l'origine :

$$h(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} h_l(x), \forall x \in \mathcal{U}, \text{ où } h_l(x) \text{ est homogène de degré } l \text{ par rapport à } \delta_\varepsilon^r \quad (3.4)$$

h est dite d'ordre $o(h)$ supérieur ou égal à $m \in \mathbb{N}$, si $h_l = 0$ pour $l = 0, \dots, m-1$.

La définition de l'ordre d'une fonction réelle provient de son développement en fonctions homogènes. On peut le définir de la même façon pour des champs de vecteurs. Ou de manière alternative, nous pouvons regarder un champ de vecteurs comme un opérateur différentiel sur l'espace des fonctions réelles (voir l'annexe).

Définition 3.2. *Bianchini et Stefani (1990)* Soit δ_ε^r , $r \in \mathbb{N}^n$, une dilatation et $f \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$. Le champ de vecteurs f est dit d'ordre supérieur ou égal à $m \in \mathbb{Z}$ si pour chaque fonction $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$o(\mathcal{L}_f h) \geq o(h) + m \quad (3.5)$$

De manière équivalente, si on écrit le développement de f en champs de vecteurs homogènes par rapport à δ_ε^r sur un voisinage \mathcal{U} de l'origine :

$$f(x) = \sum_{l=-\max_i r_i}^{+\infty} f_l(x), \quad \forall x \in \mathcal{U} \quad (3.6)$$

où f_l est homogène de degré l par rapport à δ_ε^r , alors f est dite d'ordre $o(f)$ supérieur ou égal à m , si $f_l = 0$ pour $l = -\max_i r_i, \dots, m-1$.

Exemple 3.1. Le champ de vecteurs $f(x) = (x_2 + x_1 + x_2 x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1^3 + x_1 x_2 + x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2}$ avec les poids $(r_1, r_2) = (1, 2)$, admet le développement homogène suivant :

$$f(x) = \sum_{l=-2}^2 f_l(x) \quad (3.7)$$

avec $f_{-2}(x) = 0$, $f_{-1}(x) = 0$, $f_0(x) = (x_1) \frac{\partial}{\partial x_1}$, $f_1(x) = (x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1^3 + x_1 x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$, $f_2(x) = (x_1 x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2}$. De plus f est d'ordre $o(f) \geq 0$.

◇

La notion d'ordre $o(D)$ peut être définie pour n'importe quel opérateur différentiel :

Définition 3.3. *Bianchini et Stefani (1990)* Soit D un opérateur différentiel sur l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, alors D est d'ordre $o(D)$ supérieur ou égal à m si pour tout $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$o(Dh) \geq o(h) + m \quad (3.8)$$

Remarque 3.1. Les mêmes notations ont été prises pour définir l'ordre des fonctions réelles, des champs de vecteurs et des opérateurs différentiels. Cependant, il ne devrait y avoir aucune ambiguïté dans le reste de ce mémoire.

3.2.2 Filtration, dilatation et changement de coordonnées

Nous définissons d'abord la notion de filtration croissante pour une algèbre de Lie L de champs de vecteurs définis sur un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^n .

Définition 3.4. *Hermes (1991)* Soit L une algèbre de Lie de champs de vecteurs. Une filtration croissante \mathcal{F} , de L à l'origine, est une suite de sous-espaces $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j \geq 0}$ de L telle que :

- (i) $F_j \subset F_{j+1}$, $j \geq 0$,
- (ii) $[F_i, F_j] \subset F_{i+j}$, $i, j \geq 0$,
- (iii) $\bigcup_{i \geq 0} F_i = L$,
- (iv) $f \in F_0$ implique $f(0) = 0$.

Exemple 3.2. Soit L une algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments, i.e. $L = L(f_1, \dots, f_m)$, où f_1, \dots, f_m sont des champs de vecteurs réels analytiques. On choisit $F_0 = \emptyset$, $F_1 = \text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$ et F_j est défini comme l'espace engendré par le produit de i éléments de $\{f_1, \dots, f_m\}$ avec $i \leq j$. Cela donne une filtration croissante $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j \geq 0}$ de L à l'origine. \diamond

Avant de pouvoir définir la notion de dilatation adaptée à une filtration, on doit d'abord construire une base pour cette filtration. Considérons donc une algèbre L de champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n et $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j \geq 0}$ une filtration croissante de L à l'origine. Nous supposons de plus que $\dim L(0) = n$, et nous notons $d = \min\{k : \dim F_k(0) = n\}$. Alors on définit une base de \mathcal{F} à l'origine de manière récursive :

- soit n_1 la dimension de $F_1(0)$, alors nous pouvons trouver n_1 éléments de F_1 , $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n_1}$ tels que $\bar{f}_1(0), \dots, \bar{f}_{n_1}(0)$ soient linéairement indépendants,
- soit n_2 la dimension de $F_2(0)$, comme $F_1 \subset F_2$, nous pouvons trouver $\bar{f}_{n_1+1}, \dots, \bar{f}_{n_2}$, des éléments de F_2 tels que $\bar{f}_1(0), \dots, \bar{f}_{n_2}(0)$ soient linéairement indépendants,
- ⋮
- soit n_d la dimension de $F_d(0)$, comme $F_{d-1} \subset F_d$, nous pouvons trouver $\bar{f}_{n_{d-1}+1}, \dots, \bar{f}_{n_d}$, des éléments de F_d tels que $\bar{f}_1(0), \dots, \bar{f}_{n_d}(0)$ soient linéairement indépendants.

Nous obtenons donc :

$$\bar{f}_i \in F_j, \quad \text{pour } n_{j-1} + 1 \leq i \leq n_j, \quad j = 1, \dots, d \quad (3.9)$$

où $n_0 = 0$.

La définition de la dilatation adaptée à la filtration est directement liée à cette base (ou plutôt à la dimension des sous-espaces croissants).

Définition 3.5. *Bianchini et Stefani (1990)* Soit :

$$r_i = j \quad \text{pour } n_{j-1} + 1 \leq i \leq n_j \quad (3.10)$$

On appelle δ_ε^r , où $r = (r_1, \dots, r_n)$, la dilatation adaptée à la filtration \mathcal{F} . De manière équivalente, on appelle (r_1, \dots, r_n) les poids adaptés à la filtration \mathcal{F} .

Nous définissons maintenant le changement de coordonnées, en utilisant la base $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$, par $z = \varphi^{-1}(x)$, où φ est donnée par :

$$x = \varphi(z) = \exp(x_1 \bar{f}_1) \circ \dots \circ \exp(x_n \bar{f}_n)(0) \quad (3.11)$$

Par construction φ est un difféomorphisme local et fournit ce qui est couramment appelé des *coordonnées locales de second type par rapport à $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$* . On appellera le changement de coordonnées $z = \varphi^{-1}(x)$ un changement de coordonnées adapté à la filtration \mathcal{F} .

3.2.3 Propriété des nouvelles coordonnées

Nous avons défini un changement de coordonnées adapté à la filtration \mathcal{F} , nous allons donc examiner les propriétés des champs de vecteurs de L dans les nouvelles coordonnées, définies par (3.11), ce qui nous permettra de définir l'approximation voulue.

Proposition 3.1. (*Hermes, 1991, Proposition 2.1*) Dans les coordonnées (z_1, \dots, z_n) adaptées à \mathcal{F} , nous avons :

$$\bar{f}_i(0) = \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

Démonstration. Dans les coordonnées locales z , considérons l'application de l'espace tangent $\varphi_*(z)$, induite par l'application $x = \varphi(z)$, comme une fonction prenant pour valeur une matrice $n \times n$ ayant pour colonnes $\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial z_n}$. D'après le théorème B.1 :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(z) = \bar{f}_1(\varphi(z)) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_2}(z) = (\exp(z_1 \bar{f}_1))_* \bar{f}_2(\exp(-z_1 \bar{f}_1) \circ \varphi(z)) \quad (3.14)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(\frac{z_1^\nu}{\nu!} \right) (ad^\nu \bar{f}_1, \bar{f}_2)(\varphi(z)) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_3}(z) = (\exp(z_1 \bar{f}_1))_* (\exp(z_1 \bar{f}_2))_* \bar{f}_3(\exp(-z_2 \bar{f}_1) \circ \exp(-z_1 \bar{f}_1) \circ \varphi(z)) \quad (3.16)$$

$$= \sum_{\nu_1, \nu_2=0}^{+\infty} \left(\frac{z_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \right) \left(\frac{z_2^{\nu_2}}{\nu_2!} \right) (ad^{\nu_1} \bar{f}_1(ad^{\nu_2} \bar{f}_2, \bar{f}_3))(\varphi(z)) \quad (3.17)$$

$$\vdots \quad (3.18)$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \varphi(0)}{\partial z_i} = \bar{f}_i(0), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.19)$$

Notons $\bar{f}_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, n$, c'est-à-dire que \bar{f}_i est décomposé relativement aux coordonnées x . Soit $a^i(x)$ le vecteur colonne $(a_{i1}(x), \dots, a_{in}(x))$ et $\alpha_i(z)$ le vecteur colonne des composantes de \bar{f}_i relativement aux coordonnées z . Alors :

$$\alpha^i(z) = \varphi_*^{-1}(\varphi(z))a^i(\varphi(z)) \quad (3.20)$$

Comme $\varphi^{-1}(\varphi(z)) = z$, $\varphi_*^{-1}(\varphi(z))\varphi_*(z) = id$ ou $\varphi_*^{-1}(\varphi(z)) = (\varphi_*(z))^{-1}$, et donc :

$$\varphi_*(0)\alpha^i(0) = a^i(0) \quad (3.21)$$

Mais, d'après (3.19), la i ème colonne de $\varphi_*(0)$ est $a^i(0)$. Donc d'après (3.21), $\alpha^i(0)$ est un vecteur colonne avec toutes ses coordonnées nulles, sauf la i ème composante qui vaut 1. Ceci signifie que dans les coordonnées z , $\bar{f}_i(0) = \frac{\partial}{\partial z_i}$. \square

Proposition 3.2. (*Hermes, 1991, Proposition 2.2*) Si $f \in F_k$ et $f(z) = \sum_{j=1}^n a_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$, alors $a_j(0) = 0$ pour $k < r_j$ ou de manière équivalente, si $j > n_k$.

Démonstration. Par construction, $\dim F_k(0) = n_k$ et $\bar{f}_1(0), \dots, \bar{f}_{n_k}(0)$ engendrent $F_k(0)$. D'après la Proposition 3.1, on a que $f = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in F_k$ implique $a_j(0) = 0$ pour $j > n_k$. Mais d'après (3.10), $j > n_k$ implique $r_j > k$, et donc $a_j(0) = 0$ pour $k < r_j$. \square

Le résultat le plus important est donné par le théorème suivant, qui montre que dans les nouvelles coordonnées adaptées à la filtration, l'ordre des champs de vecteurs est relié directement à la filtration.

Théorème 3.1. (*Hermes, 1991, Théorème 2.1*) Soit L une algèbre de Lie de champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n et $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j \geq 0}$ une filtration croissante sur L à l'origine avec δ_ϵ^r la dilatation adaptée à \mathcal{F} et $z = (z_1, \dots, z_n)$ des coordonnées locales adaptées à \mathcal{F} . Alors si $g \in F_l$:

$$o(g) \geq -l \quad (3.22)$$

ou de manière équivalente :

$$g(z) = g_{-l}(z) + g_{-l+1}(z) + g_{-l+2}(z) + \dots \quad (3.23)$$

où $g_k(z)$ est un champ de vecteurs homogène de degré k par rapport à δ_ϵ^r .

Démonstration. Soit $g(z) = \sum_{j=1}^n a_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$. Nous devons montrer que pour tout $1 \leq j \leq n$:

$$a_j(z) = a_j^{r_j-l}(z) + a_j^{r_j-l+1}(z) + \dots \quad (3.24)$$

où chaque a_j^s est une fonction homogène de degré s par rapport à la dilatation δ_ϵ^r , c'est-à-dire, $a_j^s(z) = 0$ quand $s < r_j - l$.

Si $x = \varphi(z)$ est donné par l'équation (3.11) et $g(z)$ est le champ de vecteurs g exprimé dans les nouvelles coordonnées z , alors $g(\varphi(z)) = \varphi_*(z)g(z)$. Si on ramène les deux

membres de cette équation à l'origine par l'application $(\exp(-z_n \bar{f}_n))_* \dots (\exp(-z_1 \bar{f}_1))_*$ en utilisant le théorème B.1 (en annexe), cela donne :

$$\sum_{|\nu|=0}^{+\infty} \frac{(-z_n)^{\nu_n}}{\nu_n!} \dots \frac{(-z_1)^{\nu_1}}{\nu_1!} (ad^{\nu_n} \bar{f}_n(\dots (ad^{\nu_1} \bar{f}_1, g) \dots)) (0) \quad (3.25)$$

$$= \sum_{j=1}^n a_j(z) (\exp(-z_n \bar{f}_n))_* \dots (\exp(-z_1 \bar{f}_1))_* \varphi_*(z) \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Si on considère

$$\varphi_*(z) \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \quad (3.26)$$

nous obtenons

$$\varphi_*(z) \frac{\partial}{\partial z_j} = (\exp(-z_1 \bar{f}_1))_* \dots (\exp(-z_{j-1} \bar{f}_{j-1}))_* \bar{f}_j((\exp(-z_{j-1} \bar{f}_{j-1})) \circ \dots \circ (\exp(-z_1 \bar{f}_1)) \circ \varphi(z)) \quad (3.27)$$

En utilisant ceci dans l'équation (3.25) et le théorème B.1, nous obtenons :

$$\sum_{|\nu|=0}^{+\infty} \frac{(-z_n)^{\nu_n}}{\nu_n!} \dots \frac{(-z_1)^{\nu_1}}{\nu_1!} (ad^{\nu_n} \bar{f}_n(\dots (ad^{\nu_1} \bar{f}_1, g) \dots)) (0) = \quad (3.28)$$

$$\sum_{j=1}^n a_j(z) \sum_{|\nu|=0}^{+\infty} \frac{(-z_n)^{\nu_n}}{\nu_n!} \dots \frac{(-z_j)^{\nu_j}}{\nu_j!} (ad^{\nu_n} \bar{f}_n(\dots (ad^{\nu_{j+1}} \bar{f}_{j+1}, f_j) \dots))(0)$$

Soit $\bar{f}_j(0) = e_j$, $j = 1, \dots, n$ une base de l'espace tangent à l'origine. On écrit :

$$(ad^{\nu_n} \bar{f}_n(\dots (ad^{\nu_1} \bar{f}_1, g) \dots))(0) = \sum_{j=1}^n \beta_j^\nu e_j \quad (3.29)$$

Le champ de vecteurs g appartient à F_l et de plus, par (3.9) et (3.10), on a $\bar{f}_i \in F_{r_i}$, $i = 1, \dots, n$. Ainsi, comme $[F_j, F_k] \subset F_{j+k}$, il s'ensuit que

$$(ad^{\nu_n} \bar{f}_n(\dots (ad^{\nu_1} \bar{f}_1, g) \dots)) \in F_{\sum_{i=1}^n r_i \nu_i + l} \quad (3.30)$$

D'après la proposition 3.2, cela signifie que

$$\beta_j^\nu = 0 \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^n r_i \nu_i + l < r_j \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n r_i \nu_i < r_j - l \quad (3.31)$$

De manière similaire, soit

$$(ad^{\nu_n} \bar{f}_n(\dots (ad^{\nu_{j+1}} \bar{f}_{j+1}, f_j) \dots))(0) = \sum_{i=1}^n \gamma_{ji}^\nu e_i \quad (3.32)$$

En substituant $(ad^{\nu_n} \bar{f}_n(\dots (ad^{\nu_{j+1}} \bar{f}_{j+1}, f_j) \dots))(0)$ dans (3.28) par l'égalité précédente et en séparant le terme correspondant à $|\nu| = 0$ dans le membre de droite, nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{|\nu|=0}^{+\infty} \frac{(-z_n)^{\nu_n}}{\nu_n!} \dots \frac{(-z_1)^{\nu_1}}{\nu_1!} \beta_j^\nu \right) e_j = \sum_{j=1}^n a_j(z) e_j + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-z_n)^{\nu_n}}{\nu_n!} \dots \frac{(-z_i)^{\nu_i}}{\nu_i!} \gamma_{ji}^\nu \right) e_j \quad (3.33)$$

Le membre de droite de (3.33) est affine en $a(z) = (a_1(z), \dots, a_n(z))$, donc, en notant $b(z) = (b_1(z), \dots, b_n(z))$, où

$$b_j(z) = \sum_{|\nu|=0}^{+\infty} \frac{(-z_n)^{\nu_n}}{\nu_n!} \dots \frac{(-z_1)^{\nu_1}}{\nu_1!} \beta_j^\nu \quad (3.34)$$

et $C(z) = (c_{ij}(z))_{1 \leq i, j \leq n}$, où

$$c_{ij}(z) = \sum_{|\nu|=1}^{+\infty} \frac{(-z_n)^{\nu_n}}{\nu_n!} \dots \frac{(-z_i)^{\nu_i}}{\nu_i!} \gamma_{ji}^\nu \quad (3.35)$$

et en mettant en équation les coefficients de e_i , $i = 1, \dots, n$ dans (3.33), alors $a(z)$ doit satisfaire le système suivant :

$$(I + C(z))a(z) = b(z) \quad (3.36)$$

ce qui mène à

$$a(z) = (I + C(z))^{-1}b(z) = b(z) - C(z)b(z) + C^2(z)b(z) - \dots \quad (3.37)$$

Maintenant, l'équation (3.31) montre que $b_j(z)$ est la somme de termes homogènes de degrés supérieurs ou égaux à $(r_j - l)$, c'est-à-dire que si les $b_j^s(z)$ sont les termes du développement de $b_j(z)$ en termes homogènes, homogènes de degré s , alors $b_j^s(z) = 0$ si $s < (r_j - l)$. Comme la j ème composante de $C(z)b(z)$ est d'ordre supérieur ou égal à celui de $b_j(z)$, etc., il suit que $a_j(z)$ est la somme de termes homogènes d'ordres supérieurs ou égaux à $(r_j - l)$, c'est-à-dire $a_j^s(z) = 0$ si $s < (r_j - l)$, ce qui termine la démonstration. \square

3.2.4 Construction et propriétés de l'approximation

Maintenant que nous avons construit des nouvelles coordonnées et établi les propriétés nécessaires, nous allons pouvoir construire l'approximation homogène pour le système (3.1). Soit L une algèbre de Lie de champs de vecteurs analytiques, $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j \geq 0}$ une filtration croissante de L à l'origine et δ_ϵ^r la dilatation adaptée à \mathcal{F} . Dans les coordonnées locales z adaptées à \mathcal{F} , on peut écrire :

$$g(z) = \sum_{k=-l}^{+\infty} g^k(z), \quad g^k \text{ homogène de degré } k \text{ par rapport à } \delta_\epsilon^r \quad (3.38)$$

où $g \in F_l$ et δ_ϵ^r est la dilatation adaptée à \mathcal{F} .

Définition 3.6. *Hermes (1991)* L'approximation de $g \in F_l$ par rapport à la filtration \mathcal{F} est donnée par :

$$\tilde{g}(z) = g^{-l}(z) \quad (3.39)$$

Si on décompose le champ de vecteurs g appartenant à F_l , dans les coordonnées z , i.e.

$$g(z) = \sum_{i=1}^n a_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i} \quad (3.40)$$

chaque fonction a_i s'écrit comme $a_i(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_i^k(z)$ avec a_i^k homogène de degré k . Alors $a_i^k(z) = 0$ pour $k = 0, \dots, (r_i - l - 1)$ et

$$\tilde{g}(z) = g^{-l}(z) = \sum_{i=1}^n a_i^{r_i-l}(z) \frac{\partial}{\partial z_i} \quad (3.41)$$

Nous allons maintenant examiner les propriétés de l'approximation $\tilde{g} = g^l$ du champ de vecteurs $g \in F_l$. Considérons une algèbre de Lie de champs de vecteurs $L(\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_m)$, engendrée par un nombre fini d'éléments. Ce qui nous intéresse ici, c'est de savoir comment les crochets de Lie des champs de vecteurs $\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_m$ sont reliés aux crochets correspondants à $\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_m$.

Théorème 3.2. *Hermes (1991) Soit $L = L(f_0, \dots, f_m)$ avec $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j \geq 0}$ une filtration croissante à l'origine. Soit $z = (z_1, \dots, z_n)$ des coordonnées adaptées à \mathcal{F} et supposons que $f_i \in F_{l_i}$, $i = 0, \dots, m$. Soit*

$$\begin{aligned} g(z) &= [f_{i_1}[f_{i_2}[\dots[f_{i_{s-1}}, f_{i_s}]\dots]](z), \quad f_{i_j} \in \{f_0, \dots, f_m\}, \quad j = 1, \dots, s \\ &\triangleq \sum_{i=1}^n a_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i} \end{aligned} \quad (3.42)$$

donc $g \in F_l$ où $l = \sum_{j=1}^s l_{i_j}$. Alors, si :

$$\begin{aligned} \tilde{g}(z) &= [\tilde{f}_{i_1}[\tilde{f}_{i_2}[\dots[\tilde{f}_{i_{s-1}}, \tilde{f}_{i_s}]\dots]](z) \\ &\triangleq \sum_{i=1}^n b_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i} \end{aligned} \quad (3.43)$$

est le commutateur correspondant de l'approximation, on a :

$$\begin{aligned} a_i(0) &= b_i(0), & n_{l-1} + 1 &\leq i \leq n_l \\ a_i(0) &= b_i(0) = 0, & n_{l+1} &\leq i \leq n \end{aligned} \quad (3.44)$$

Corollaire 3.1. Pour chaque $l = 0, 1, \dots$ on a l'égalité suivante :

$$\{g(0) : g \in F_l\} = \{\tilde{g}(0) : \tilde{g} \text{ est l'approximation relative à } \mathcal{F} \text{ de } g \in F_l\} \quad (3.45)$$

Démonstration du théorème 3.2. Premièrement, $g \in F_l$ implique, par la Proposition 3.2, que $a_j(0) = 0$ pour $n_l + 1 \leq j \leq n$. De plus, $\tilde{g}_{i_j} = g_{i_j}^{-l_{i_j}}$ est homogène de degré $-l_{i_j}$. Donc le produit qui définit \tilde{g} est homogène de degré $-l = -\sum_{j=1}^s l_{i_j}$. Cela signifie que $b_j \in P_{r_j-l}$, donc $b_j(0) = 0$ quand $r_j > l$ ou quand $j \geq n_l + 1$. Nous avons donc montré la deuxième égalité de (3.44).

Pour chaque $j = 1, \dots, s$ on écrit $g_{i_j} = g_{i_j}^{-l_{i_j}} + R_{i_j} = \tilde{g}_{i_j} + R_{i_j}$, où R_{i_j} est une somme de

champs de vecteurs homogènes de degrés supérieurs ou égaux à $-l_{i_j} + 1$. Le produit qui définit g s'écrit alors sous la forme :

$$g = \tilde{g} + W \quad (3.46)$$

où W est une somme de champs de vecteurs homogènes de degrés supérieurs ou égaux à $-l + 1$. Ceci signifie que si $W(z) = \sum_{j=1}^n e_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$, alors $e_j(0) = 0$ pour $n_{l-1} + 1 \leq j \leq n_j$, ce qui montre la première égalité de (3.44). \square

3.3 Approximation homogène pour le problème de l'observabilité

Dans cette partie, nous exposons les principaux résultats de ce chapitre. Nous allons nous inspirer de la construction précédente afin de construire une approximation pour le problème de l'observabilité. Dans un premier temps, nous allons définir un drapeau sur l'espace d'observabilité, puis un changement de variables induit par ce drapeau. Ensuite nous établirons les propriétés du système dans ces nouvelles coordonnées. Finalement nous définirons l'approximation et vérifierons qu'elle est adaptée au problème de l'observabilité.

Nous considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ y = h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x)), & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (3.47)$$

où x est l'état et y est la sortie mesurée. Nous supposons que les fonctions h_i , $i = 1, \dots, p$ et le champ de vecteurs f sont analytiques. De plus, nous supposons que $h_i(0) = 0$ et $f(0) = 0$.

3.3.1 Changement de coordonnées

Afin de définir le changement de coordonnées qui prend en compte la structure de l'espace d'observabilité $d\mathcal{O}$, défini par :

$$d\mathcal{O} = d \left(\text{span} \{ \mathcal{L}_f^k h_m : k \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq p \} \right) \quad (3.48)$$

nous définissons un drapeau du sous-espace $d\mathcal{O}$ de $\Omega^1(\mathbb{R}^n)$ par :

$$L_j = d \left(\text{span} \{ \mathcal{L}_f^i h_k : 0 \leq i \leq j-1, k = 1, \dots, p \} \right) \quad (3.49)$$

Le drapeau $\{L_j\}_{j \geq 0}$ possède les propriétés suivantes :

- $L_j \subset L_{j+1}$, $j \geq 0$
- $\mathcal{L}_f L_j \subset L_{j+1}$, $j \geq 0$
- $d\mathcal{O} = \cup_{j \geq 0} L_j$.

Maintenant que nous avons défini un drapeau sur l'espace d'observabilité, la construction d'un changement de coordonnées adapté à ce drapeau est divisée en trois parties : premièrement, nous construisons une base de 1-formes. Deuxièmement, nous construisons une base duale de champs de vecteurs. Finalement, nous utilisons la base de champs de vecteurs pour définir le changement de coordonnées.

Étape 1 : Construction d'une base de 1-formes.

Une "base" du drapeau à l'origine doit être définie. Nous supposons que le système (3.47) vérifie une condition d'observabilité du rang à l'origine, i.e. $\dim d\mathcal{O}(0) = n$. Soit $d = \min\{k : \dim L_k(0) = n\}$. Cette base est définie de manière récursive :

- Soit n_1 la dimension de $L_1(0)$, soit $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{n_1}$ des éléments de L_1 tels que $\bar{\omega}_1(0), \dots, \bar{\omega}_{n_1}(0)$ soient linéairement indépendants.
- Soit n_2 la dimension de $L_2(0)$, comme $L_1 \subset L_2$, nous pouvons choisir $\bar{\omega}_{n_1+1}, \dots, \bar{\omega}_{n_2}$ des éléments de L_2 tels que $\bar{\omega}_1(0), \dots, \bar{\omega}_{n_2}(0)$ soient linéairement indépendants.
- ...
- Soit $n_d = n$ la dimension de $L_d(0)$, nous pouvons choisir $\bar{\omega}_{n_{d-1}+1}, \dots, \bar{\omega}_{n_d}$ des éléments de L_d tels que $\bar{\omega}_1(0), \dots, \bar{\omega}_{n_d}(0)$ soient linéairement indépendants.

Ainsi, des éléments $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$ de $d\mathcal{O}$, sont obtenus, et tels que $\bar{\omega}_1(0), \dots, \bar{\omega}_n(0)$ soient linéairement indépendants et :

$$\bar{\omega}_i \in L_j, \quad n_{j-1} + 1 \leq i \leq n_j, \quad j = 1, \dots, d \quad (3.50)$$

avec $n_0 = 0$.

Comme le sous-espace $d\mathcal{O}$ de $\Omega^1(\mathbb{R}^n)$ ne contient que des formes exactes, il existe n fonctions réelles $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n$ telles que :

$$d\bar{h}_i = \bar{\omega}_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.51)$$

Comme $h(0) = 0$ et $f(0) = 0$, nous pouvons choisir $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n$ tels que $\bar{h}_i(0) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$, ce qui rend le choix de telles fonctions unique.

Étape 2 : Construction d'une base duale de champs de vecteurs

Afin de construire un changement de variables, nous définissons tout d'abord une base de champs de vecteurs. Nous exposons, dans un premier temps, les propriétés que doivent satisfaire cette base pour définir un changement de coordonnées adapté au drapeau. Nous montrerons ensuite qu'il existe toujours une base satisfaisant ces propriétés.

Soit $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n$ des champs de vecteurs définis sur \mathcal{U} , un voisinage de l'origine, linéairement indépendants en zéro. Notons V la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{V}(\mathcal{U})$ engendrée par f et $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\}$. Une suite de sous-espaces croissants $(V_j)_{j \geq 0}$ de V est donnée par

$$V_j = \{g \in V : \bar{\omega}_i(g) = 0, 1 \leq i \leq n_{d-j}\} \quad (3.52)$$

Dans la suite, nous aurons besoin que la suite $(V_j)_{j \geq 0}$ et les champs de vecteurs $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n$ vérifient l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1.

- (i) $V_j \subset V_{j+1}$,
- (ii) $[V_j, V_k] \subset V_{j+k}$,
- (iii) $\cup_{0 \leq j \leq d} V_j = V$,
- (iv) $[f, V_j] \subset V_{j+1}$,
- (v) $D\bar{h}_i(0) = 0, \forall i = n_j + 1, \dots, n_{j+1}, \forall D \in B_{d-j-1}$, où $B_j = \text{span}\{\mathcal{L}_{g_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{g_k} : \{g_1, \dots, g_k\} \subset \{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\} \text{ et } \sum_{l=1}^k w(g_l) \leq j\}$, et $w(g) = \min\{i : g \in V_i\}$ pour tout g dans V ,
- (vi) $\bar{\omega}_i(\bar{g}_j)(0) = 0$, pour tout i, j tel que $1 \leq i < n_k + 1 \leq j \leq n_d, \quad 1 \leq k \leq d-1$.

Nous allons maintenant montrer qu'une base vérifiant l'hypothèse (3.1) existe toujours. Considérons la matrice $M(x)$ pour laquelle les colonnes sont les 1-formes $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$, c'est-à-dire :

$$M_{ij}(x) = \bar{\omega}_j^i(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.53)$$

où chaque 1-forme $\bar{\omega}_i$ est décomposée sous la forme $\bar{\omega}_i(x) = \sum_{j=1}^n \bar{\omega}_i^j(x) dx_j$. Comme la condition d'observabilité du rang est satisfaite à l'origine, la matrice $M(x)$ est inversible dans un voisinage \mathcal{U} de l'origine. Il existe donc des champs de vecteurs $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n$, appartenant à $\mathcal{V}(\mathcal{U})$, qui vérifient :

$$\bar{\omega}_i(\tilde{g}_j)(x) = \delta_i^j, \quad x \in \mathcal{U} \quad (3.54)$$

Nous pouvons maintenant définir la base duale de champs de vecteurs pour notre problème. Pour tout i tel que $n_{j-1} + 1 \leq i \leq n_j$, nous définissons :

$$\bar{g}_i(x) = (\tilde{g}_i)_{(d-j+1)}(x), \quad \forall x \in \mathcal{U} \quad (3.55)$$

où $g_{(k)}$ est le développement de Taylor de g jusqu'à l'ordre k .

Proposition 3.3. *La base de champs de vecteurs définie par l'équation (3.55) vérifie l'hypothèse (3.1).*

Afin de prouver cette proposition, nous aurons besoin du résultat technique suivant :

Lemme 3.1. *Soit $g \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$ et $\omega \in \Omega^1(\mathcal{U})$, où \mathcal{U} est un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^n , tel que*

$$\omega(g)(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{U} \quad (3.56)$$

Notons $g_{(k)}$ (resp. $(\omega(g))_{(l)}$) le développement de Taylor de g (resp. $\omega(g)$) jusqu'à l'ordre k (resp. l), alors :

$$(\omega(g_{(k)}))_{(l)} \equiv 0, \quad l = 0, \dots, k-1 \quad (3.57)$$

Démonstration. Comme g et ω sont analytiques, nous pouvons écrire g sous la forme :

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} g_k^i(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad x \in \mathcal{U}, \quad (3.58)$$

où $g_k^i(x)$ est le k -ème terme dans le développement de Taylor de $g^i(x)$, et

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k^i(x) \right) dx_i, \quad x \in \mathcal{U} \quad (3.59)$$

où $\omega_k^i(x)$ est le k -ème terme dans le développement de Taylor de ω^i . Ainsi

$$\omega(g)(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} g_{k_1}^i(x) \right) \left(\sum_{k_2=0}^{+\infty} \omega_{k_2}^i(x) \right) \quad (3.60)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l g_m^i(x) \omega_{l-m}^i(x) \right) \quad (3.61)$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{m=0}^l g_m^i(x) \omega_{l-m}^i(x) \right) \quad (3.62)$$

est le développement de Taylor de la fonction $\omega(g)$. Comme $\omega(g)$ est analytique et s'annule dans un voisinage \mathcal{U} de l'origine, nécessairement, nous avons :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{m=0}^l g_m^i(x) \omega_{l-m}^i(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad l \geq 0 \quad (3.63)$$

Donc, si $g_{(k)}$ est pris à la place de g , les $k-1$ premiers termes du développement de Taylor de $\omega(g)$ s'annulent toujours, c'est-à-dire $(\omega(g))_{(l)} = 0, l = 0, \dots, k-1$. \square

Démonstration de la proposition 3.3.

(i), (iii) et (vi). Ces propriétés sont évidentes à partir de la définition de $(\bar{g}_i)_{1 \leq i \leq n}$.

(v). Soit i tel que $n_{j-1} + 1 \leq i \leq n_j$, nous devons prouver que pour tout $D \in B_{d-j-1}$:

$$D\bar{h}_i(0) = 0 \quad (3.64)$$

Comme D est dans B_{d-j-1} , nous pouvons écrire

$$D = \mathcal{L}_{g_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{g_k}, \quad \text{avec} \quad \sum_{l=1}^k w(g_l) \leq d-j-1 \quad (3.65)$$

Soit $p = w(g_k)$, par le Lemme 3.1 et par la définition de g_k , nous obtenons :

$$(\mathcal{L}_{g_k} \bar{h}_i)_{(l)}(0) = 0, \quad 0 \leq l \leq d-p \quad (3.66)$$

Or $k - 1 < d - p$, car $(k - 1) + p \leq d - j - 1 < d$, donc :

$$D\bar{h}_i(0) = \mathcal{L}_{g_1} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{g_k} \bar{h}_i(0) = 0 \quad (3.67)$$

(ii) et (iv). Remarquons tout d'abord que la propriété (iv) est une conséquence de la propriété (ii) car f appartient à V_1 (car $\bar{w}_i(f)(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$). Comme V est engendré par f et $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\}$, nous devons juste montrer que, pour un k donné et pour des champs de vecteurs $g_1, \dots, g_k \in \{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n, f\}$ qui vérifient $\sum_{l=1}^k w(g_l) = j$, la propriété suivante est vérifiée :

$$ad_{g_1} \dots ad_{g_{k-1}} g_k \in V_j \quad (3.68)$$

c'est-à-dire, nous devons vérifier que :

$$\bar{w}_i(ad_{g_1} \dots ad_{g_{k-1}} g_k)(0) = 0, \quad 1 \leq i \leq n_{d-j} \quad (3.69)$$

Le membre de gauche de l'équation (3.69) peut être réécrit comme :

$$\mathcal{L}_{ad_{g_1} \dots ad_{g_{k-1}} g_k} \bar{h}_i(0) \quad (3.70)$$

Pour deux champs de vecteurs $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$ et une fonction $\tilde{h} \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , nous avons :

$$\mathcal{L}_{[\tilde{f}, \tilde{g}]} \tilde{h} = \mathcal{L}_{\tilde{f}} \mathcal{L}_{\tilde{g}} \tilde{h} - \mathcal{L}_{\tilde{g}} \mathcal{L}_{\tilde{f}} \tilde{h} \quad (3.71)$$

Donc (3.70) peut être écrit comme la somme de termes du type $c \mathcal{L}_{g_{s_1}} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{g_{s_k}} \bar{h}_i$ avec $\{s_1, \dots, s_k\} = \{1, \dots, k\}$ et $c = \pm 1$. Considérons les deux cas possibles. Premièrement, supposons que g_{s_k} appartienne à $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\}$. Dans ce cas, l'idée de la preuve est la même que pour la propriété (v). En effet, nous devons montrer que :

$$\mathcal{L}_{g_{s_1}} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{g_{s_k}} \bar{h}_i(0) = 0 \quad (3.72)$$

si $1 \leq i \leq n_{j+1}$ et $\sum_{l=1}^k w(g_l) \leq d - j - 1$, ce qui est équivalent à $1 \leq i \leq n_{d-j}$ et $\sum_{l=1}^k w(g_l) \leq j$.

Le deuxième cas arrive quand $g_{s_k} = f$. Dans ce cas, nous avons :

$$\mathcal{L}_{g_{s_1}} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{g_{s_k}} \bar{h}_i = \mathcal{L}_{g_{s_1}} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{g_{s_{k-1}}} \circ \mathcal{L}_f \bar{h}_i \quad (3.73)$$

Comme $\mathcal{L}_f \bar{h}_i$ appartient à L_{j+2} et $\sum_{l=1}^{k-1} w(g_l) \leq d - j - 2$, alors, de nouveau, nous vérifions si $g_{s_{k-1}}$ est égal à f ou appartient à $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\}$, et ainsi de suite.

Ceci montre que :

$$\mathcal{L}_{ad_{g_1} \dots ad_{g_{k-1}} g_k} \bar{h}_i(0) = 0, \quad 1 \leq i \leq n_{d-j}, \quad \sum_{l=1}^k w(g_l) \leq j \quad (3.74)$$

□

Étape 3 : Définition des nouvelles coordonnées

Considérons des champs de vecteurs $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n$ vérifiant l'hypothèse 3.1. Alors, nous pouvons définir de nouvelles coordonnées $z = \varphi^{-1}(x)$, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = \exp(z_n \bar{g}_n) \circ \dots \circ \exp(z_1 \bar{g}_1)(0) \quad (3.75)$$

On appelle les coordonnées z , coordonnées adaptées au drapeau (3.49). Nous rappelons que dans les nouvelles coordonnées, les champs de vecteurs $(\bar{g}_i)_{1 \leq i \leq n}$ ont la propriété suivante :

Proposition 3.4. (*Hermes, 1991, Proposition 2.1*) Dans les nouvelles coordonnées définies par (3.75), on a $\bar{g}_i(0) = \partial/\partial z_i$, $i = 1, \dots, n$.

3.3.2 Propriétés du système dans les nouvelles coordonnées

Les propriétés des fonctions $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n$ et du champ de vecteurs f dans les nouvelles coordonnées sont maintenant étudiées. Ceci nous permettra de définir ensuite une approximation pour le problème de l'observabilité.

Pour cela, nous définissons les poids (r_1, \dots, r_n) adaptés au drapeau $\{L_j\}_{j \geq 0}$ à l'origine, par :

$$r_i = d - j, \quad n_j + 1 \leq i \leq n_{j+1}, \quad j = 0, \dots, d - 1 \quad (3.76)$$

Le théorème suivant montre que l'ordre des fonctions $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n$ et f dans les nouvelles coordonnées est adapté pour la construction d'une approximation homogène.

Théorème 3.3. Soit f et $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n$ donnés par (3.47) et (3.51) respectivement. Alors, dans les nouvelles coordonnées définies par (3.75), les ordres de f et $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n$ par rapport aux poids (3.76) vérifient :

- $o(\bar{h}_i) \geq d - j$, pour $n_j + 1 \leq i \leq n_{j+1}$, $j = 0, \dots, d - 1$.
- $o(f) \geq -1$.

Avant de montrer le théorème 3.3, nous pouvons remarquer que le résultat précédent peut être exprimé sous une forme plus adaptée au calcul. En effet, le développement de \bar{h}_i en termes homogènes par rapport aux poids (r_1, \dots, r_n) définis par (3.76) s'écrit :

$$\bar{h}_i(z) = \sum_{l=d-j=r_i}^{+\infty} \bar{h}_i^l(z), \quad n_j + 1 \leq i \leq n_{j+1}, \quad 0 \leq j \leq d - 1 \quad (3.77)$$

où les fonctions $\bar{h}_i^l(z)$ sont homogènes de degré l par rapport aux poids (r_1, \dots, r_n) . De façon similaire, le développement du champ de vecteurs f en termes homogènes par rapport aux poids (r_1, \dots, r_n) donne :

$$f(z) = \sum_{l=-1}^{+\infty} f_l(z) \quad (3.78)$$

où les champs de vecteurs $f_l(z)$ sont homogènes de degré l par rapport aux poids (r_1, \dots, r_n) .

Avant de prouver le théorème, nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme 3.2. Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ une fonction à valeurs dans \mathbb{R} et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, tel que $|\alpha| = k+1$. Soient g_1, \dots, g_n des champs de vecteurs de $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ tels que $g_i(0) = \frac{\partial}{\partial z_i}$, $i = 1, \dots, n$. Alors nous avons l'égalité suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} h_{(k+1)}(0) = \mathcal{L}_{g_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{g_n}^{\alpha_n} (h - h_{(k)}) (0) \quad (3.79)$$

où $h_{(k)}$ est le développement de Taylor de h jusqu'à l'ordre k .

Démonstration. Comme h est une fonction analytique réelle, nous pouvons écrire h sous la forme :

$$h = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{|\alpha|=l} h^\alpha \quad (3.80)$$

où $h^\alpha(z) = a_\alpha z^\alpha$, avec $a_\alpha \in \mathbb{R}$. En utilisant (3.80), nous voyons que le membre gauche de l'équation (3.79) peut être réécrit sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} h_{(k+1)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha} \sum_{|\alpha|=k+1} h^\alpha \right) (0) \quad (3.81)$$

Séparons le champ de vecteurs g_i en deux termes $g_i = \frac{\partial}{\partial z_i} + \tilde{g}_i$ avec $\tilde{g}_i(0) = 0$. En notant $\bar{h} = h - h_{(k)}$, le membre de droite de l'équation (3.79) peut être écrit :

$$\mathcal{L}_{g_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{g_n}^{\alpha_n} \bar{h}(0) = \frac{\partial}{\partial z_1^{\alpha_1}} \circ \dots \circ \frac{\partial}{\partial z_n^{\alpha_n}} \bar{h}(0) + R \quad (3.82)$$

où R contient des termes de la forme $\mathcal{L}_{g_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{g_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{g_n}^{\alpha_n} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{g_n}^{\alpha_n} \bar{h}(0)$, et où g_i^j est égal à $\frac{\partial}{\partial z_i}$ ou \tilde{g}_i .

D'après la construction de R , il existe au moins un g_i^j qui est égale à \tilde{g}_i et $|\alpha| = k+1$, donc les k premiers termes du développement de Taylor de $\bar{h} = h - h_{(k)}$ s'annulent. D'où :

$$\mathcal{L}_{g_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{g_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{g_n}^{\alpha_n} \bar{h}(0) = 0 \quad (3.83)$$

Donc

$$\mathcal{L}_{g_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{g_n}^{\alpha_n} \bar{h}(0) = \frac{\partial}{\partial z_1^{\alpha_1}} \circ \dots \circ \frac{\partial}{\partial z_n^{\alpha_n}} \bar{h}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha} \sum_{|\alpha|=k+1} h^\alpha \right) (0) \quad (3.84)$$

ce qui prouve le résultat. \square

Démonstration du Théorème 3.3.

Ordre des fonctions \bar{h}_i

Nous devons prouver que $o(\bar{h}_i) \geq d - j$, ou de manière équivalente :

$$o((\bar{h}_i)_{(k)}) \geq d - j, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.85)$$

où $h_{(k)}$ est le développement de Taylor de h jusqu'à l'ordre k . L'équation (3.85) est équivalente à :

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} (\bar{h}_i)_{(k)}(0) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tels que } \|\alpha\|_r < d - j \text{ et } |\alpha| = k \quad (3.86)$$

Nous allons prouver ce résultat par récurrence sur k .

Pour $k = 0$, l'équation (3.86) est réduite à $\bar{h}_i(0) = 0$, qui est vrai, car les fonctions de sortie $h_i, i = 1, \dots, n$, et le champ de vecteur f du système (3.47) vérifient $h_i(0) = 0$ et $f(0) = 0$.

Supposons que l'équation (3.86) soit vérifiée pour un k donné, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} (\bar{h}_i)_{(k+1)}(0) = \mathcal{L}_{\bar{g}_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\bar{g}_n}^{\alpha_n} (\bar{h}_i - (\bar{h}_i)_{(k)})(0) \quad (3.87)$$

$$= -\mathcal{L}_{\bar{g}_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\bar{g}_n}^{\alpha_n} (\bar{h}_i)_{(k)}(0) \quad (3.88)$$

$$= 0 \quad (3.89)$$

L'équation (3.87) est donnée par le Lemme 3.2. L'équation (3.88) provient de l'hypothèse 3.1-(v). L'équation (3.89) est obtenue par l'hypothèse de récurrence.

Ordre du champ de vecteurs f

Il suffit de montrer :

$$o(f_{(k)}) \geq -1, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.90)$$

où $f_{(k)}$ est le développement de Taylor de f jusqu'à l'ordre k . L'équation (3.90) va être prouvée par récurrence sur k . L'équation (3.90) est équivalente à :

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} f_{(k)}^i(0) = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \circ \mathcal{L}_{f_{(k)}} z_i(0) = 0 \quad \forall k \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } \|\alpha\|_r < r_i - 1, |\alpha| = k \quad (3.91)$$

Pour $k = 0$, l'équation (3.91) est réduite à $\mathcal{L}_f z_i(0) = 0$, pour tout i tel que $r_i \geq 1$, ce qui est équivalent à $f(0) = 0$.

Supposons que (3.91) soit vrai pour un k donné, alors :

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} \mathcal{L}_{f_{(k+1)}} z_i(0) = \mathcal{L}_{\bar{g}_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\bar{g}_n}^{\alpha_n} \circ \mathcal{L}_{f-f_{(k)}} z_i(0) \quad (3.92)$$

$$= \mathcal{L}_{\bar{g}_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\bar{g}_n}^{\alpha_n} \circ \mathcal{L}_f z_i(0) \quad (3.93)$$

où l'égalité (3.92) est obtenue à nouveau avec le Lemme 3.2 et l'égalité (3.93) est obtenue par l'hypothèse de récurrence. Le terme restant est réécrit sous la forme :

$$\mathcal{L}_{\bar{g}_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\bar{g}_n}^{\alpha_n} \circ \mathcal{L}_f z_i(0) = \mathcal{L}_f \circ \mathcal{L}_{\bar{g}_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\bar{g}_n}^{\alpha_n} z_i(0) + R \quad (3.94)$$

L'équation (3.94) est obtenue en utilisant l'égalité $\mathcal{L}_{[f,g]} = \mathcal{L}_f \circ \mathcal{L}_g - \mathcal{L}_g \circ \mathcal{L}_f$ et R contient des termes de la forme $\mathcal{L}_{\hat{g}_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\hat{g}_k}$, avec $\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_k \in V$. De plus, la condition (iv)

de l'hypothèse 3.1, montre que les termes $\mathcal{L}_{\hat{g}_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\hat{g}_k}$ appartiennent à $B_{d-r_i} = B_j$. D'après l'hypothèse de récurrence, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} \mathcal{L}_{f_{(k+1)}} z_i(0) = \mathcal{L}_f \circ \mathcal{L}_{\hat{g}_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\hat{g}_n}^{\alpha_n} z_i(0) \quad (3.95)$$

Comme $f(0) = 0$, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} \mathcal{L}_{f_{(k+1)}} z_i(0) = 0 \quad (3.96)$$

□

3.3.3 Construction de l'approximation pour l'observabilité

En utilisant les propriétés que nous avons obtenues sur le champ de vecteurs du système (3.49) et les fonctions définies par (3.51), dans les nouvelles coordonnées adaptées au drapeau, nous définissons maintenant l'approximation du système (3.47).

Considérons le drapeau $\{L_j\}_{j \geq 1}$ pour le système (3.47) donnée par l'équation (3.49). D'après le théorème 3.3, les développements de f et \bar{h}_i , $i = 1, \dots, n$, en termes homogènes par rapport aux poids (r_1, \dots, r_n) adaptés au drapeau (3.49) s'écrivent :

$$f(z) = \sum_{l=-1}^{+\infty} f_l(z) \quad (3.97)$$

$$\bar{h}_i(z) = \sum_{l=d-j=r_i}^{+\infty} \bar{h}_i^l(z), \quad n_{j-1} + 1 \leq i \leq n_j \quad (3.98)$$

Définition 3.7. L'approximation du système (3.47) par rapport au drapeau $\{L_j\}_{j \geq 1}$ est définie par :

$$\tilde{h}_i(z) = \bar{h}_i^{d-j}(z), \quad n_{j-1} \leq i \leq n_j, \quad 1 \leq j \leq d \quad (3.99)$$

$$\tilde{f}(z) = f_{-1}(z) \quad (3.100)$$

Soit $\{\tilde{L}_j\}_{j \geq 1}$ le drapeau correspondant au système :

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{f}(z), & z \in \mathbb{R}^n \\ y = \tilde{h}(z), & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (3.101)$$

Le théorème suivant montre la correspondance entre le drapeau de l'espace d'observabilité du système (3.47) et son approximation (3.101).

Théorème 3.4. Soit $\omega \in L_j$, $j \geq 1$, $\tilde{\omega}$ l'approximation homogène de ω et $k \in \mathbb{N}$. Par construction $\mathcal{L}_{\tilde{f}}^k \tilde{\omega} \in L_{k+j}$, et si on note $\mathcal{L}_f^k \omega(z) = \sum_{i=1}^n a_i(z) dz_i$ et $\mathcal{L}_{\tilde{f}}^k \tilde{\omega}(z) = \sum_{i=1}^n b_i(z) dz_i$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} a_i(0) &= b_i(0), & n_{k+j-1} + 1 &\leq i \leq n_{k+j} \\ a_i(0) &= b_i(0) = 0, & n_{k+j} + 1 &\leq i \leq n \end{aligned} \quad (3.102)$$

Le corollaire suivant, qui est une conséquence immédiate du Théorème 3.4, montre de façon plus claire la correspondance entre le drapeau d'observabilité du système original et celui de l'approximation.

Corollaire 3.2. Pour chaque $j = 1, \dots, d$, nous avons l'égalité suivante :

$$L_j(0) = \tilde{L}_j(0) \quad (3.103)$$

Ce corollaire montre que le système original et l'approximation engendrent le même espace d'observabilité à chaque étape du drapeau. Donc, que cette approximation est spécialement adaptée au problème de l'observabilité.

Avant de montrer le théorème 3.4, nous avons besoin du Lemme suivant :

Lemme 3.3. Si $\omega \in L_k$ et $\omega(z) = \sum_{i=1}^n \omega_i(z) dz_i$, alors $\omega_i(0) = 0$ si $i > n_k$.

Démonstration. Par construction, $\dim L_k(0) = n_k$, et $\bar{\omega}_1(0), \dots, \bar{\omega}_{n_k}(0)$ engendrent $L_k(0)$. D'après la Proposition 3.4 et l'hypothèse 3.1-(vi), il vient que $\omega \in L_k$, implique $\omega_i(0) = 0$ pour $i > n_k$. \square

Démonstration du Théorème 3.4.

Nous montrons le cas $\omega \in L_1$ et $k = 1$, le cas général est prouvé de la même manière. Premièrement, nous écrivons le développement homogène de f et ω , comme ω est dans L_1 , d'après le Théorème 3.3 le premier terme non nul dans le développement homogène de ω est le d -ème terme :

$$\omega(z) = \omega_d(z) + \sum_{l_2 \geq d+1} \omega_{l_2}(z) \quad (3.104)$$

D'après le Théorème 3.3, le champ de vecteurs f admet un développement de la forme :

$$f(z) = f_{-1}(z) + \sum_{l_1 \geq 0} f_{l_1}(z) \quad (3.105)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f \omega &= d(\omega(f)) \\ &= d \left(\omega_d(f_{-1}) + \sum_{l_1 \geq 0} \omega_d(f_{l_1}) \right) + d \left(\sum_{l_2 \geq d+1} \omega_{l_2}(f_{-1}) + \sum_{l_1 \geq 0, l_2 \geq d} \omega_{l_2}(f_{l_1}) \right) \\ &= d(\omega_d(f_{-1})) + \bar{\omega} \end{aligned}$$

où $\bar{\omega}$ est une somme de 1-formes qui sont homogènes de degrés supérieurs ou égaux à $d + 1$. Cela signifie que si $\bar{\omega}(z) = \sum_{i=1}^n e_i(z) dz_i$, alors par le Lemme 3.3, $e_i(0) = 0$ pour $i \geq n_1$. En évaluant les deux membres de l'égalité précédente, en zéro, nous obtenons le résultat. \square

3.4 Exemples

Dans cette partie, deux exemples sont considérés pour la construction d'une approximation. Premièrement, nous considérons un système avec une seule sortie et ensuite un système avec deux sorties.

3.4.1 Premier exemple

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^3 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \dot{x}_3 = x_3^3 + x_1^2 + x_2^3 \\ y = x_1^2 + x_2 \end{cases} \quad (3.106)$$

Notons f le champ de vecteurs associé au système (3.106), i.e. le système (3.106) est réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathbb{R}^3 \\ y = x_1^2 + x_2 = h(x) \end{cases} \quad (3.107)$$

Calculons tout d'abord l'espace d'observabilité associé au système (3.106). Les 1-formes associées à h , et aux dérivées de Lie le long de f sont données par :

$$\begin{aligned} dh(x) &= 2x_1 dx_1 + dx_2 \\ d\mathcal{L}_f h(x) &= (2x_3^2 + 2x_3 + 2x_2^2 + 4x_1 x_2 + 1) dx_1 \\ &\quad + (6x_1 x_2^2 + 3x_2^2 + 2x_1^2 + 1) dx_2 \\ &\quad + (4x_1 x_3 + 2x_1) dx_3 \\ d\mathcal{L}_f^2 h(x) &= (4x_3^4 + 2x_3^3 + 6x_2 x_3^2 + 4x_2^2 x_3 + 6x_2 x_3 + 12x_1^2 x_3 + 6x_2^5 + 6x_2^4 \\ &\quad + 4x_1 x_2^3 + 8x_2^3 + 20x_1 x_2^2 + 3x_2^2 + 4x_1 x_2 + x_2 + 12x_1^2 + 1) dx_1 \\ &\quad + (12x_2^2 x_3^2 + 6x_1 x_3^2 + 12x_1 x_2^2 x_3 + 12x_2^2 x_3 + 6x_1 x_3 + 12x_2^5 \\ &\quad + 30x_1 x_2^4 + 15x_2^4 + 24x_1 x_2^3 + 6x_1^2 x_2^2 + 24x_1 x_2^2 + 15x_2^2 \\ &\quad + 20x_1^2 x_2 + 6x_1 x_2 + 2x_1^2 + x_1 + 1) dx_2 \\ &\quad + (16x_1 x_3^3 + 8x_3^3 + 6x_1 x_2^2 + 12x_2^2 + 8x_2^3 x_3 + 12x_1 x_2 x_3 \\ &\quad + 6x_3 + 4x_1 x_2^3 + 4x_2^3 + 6x_1 x_2 + 4x_1^3 + 1) dx_3 \end{aligned}$$

À l'origine, nous avons :

$$\begin{aligned} dh(0) &= dx_2 \\ d\mathcal{L}_f h(0) &= dx_1 + dx_2 \\ d\mathcal{L}_f^2 h(0) &= dx_1 + dx_2 + dx_3 \end{aligned}$$

et la condition d'observabilité du rang est remplie.

Nous définissons le drapeau suivant, sur l'espace d'observabilité :

$$L_1 = \text{span}\{dh\}, \quad L_2 = \text{span}\{dh, d\mathcal{L}_f h\}, \quad L_3 = \text{span}\{dh, d\mathcal{L}_f h, d\mathcal{L}_f^2 h\}$$

Une base pour ce drapeau, à l'origine, est donnée par :

$$\bar{\omega}_1(x) = d\bar{h}_1(x) = dh(x), \quad \bar{\omega}_2(x) = d\bar{h}_2(x) = d\mathcal{L}_f h(x) \quad \bar{\omega}_3(x) = d\bar{h}_3(x) = d\mathcal{L}_f^2 h(x)$$

Considérons les trois champs de vecteurs suivants :

$$\bar{g}_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \bar{g}_2(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \bar{g}_3(x) = \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Vérifions que ces champs de vecteurs remplissent les conditions (i)-(vi) de l'hypothèse 3.1. Soit (V_j) la filtration définie dans l'hypothèse 3.1, alors $\bar{g}_3 \in V_1$, $\bar{g}_2 \in V_2$ et $\bar{g}_1 \in V_3$. On a donc :

- (i) cette propriété est directement satisfaite ;
- (ii) les champs de vecteurs $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ vérifient $[\bar{g}_i, \bar{g}_j] = 0$ pour tous les entiers i, j tels que $1 \leq i, j \leq 3$, donc cette propriété est aussi satisfaite ;
- (iii) cette propriété est trivialement satisfaite.
- (iv) il suffit de vérifier que $[f, \bar{g}_3] \in V_2$, car $V_3 = V$ donc pour tout $g \in V_2$, $[f, g] \in V_3$.
On a :

$$[f, \bar{g}_3](x) = -(3x_3^2 + 1) \frac{\partial}{\partial x_1} - (2x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} - (3x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (3.108)$$

Il faut vérifier que $dh([f, \bar{g}_3])(0) = 0$, or $dh([f, \bar{g}_3])(x) = 2x_1 (3x_3^2 + 1) + 2x_3$.
Donc, nous avons bien $dh([f, \bar{g}_3])(0) = 0$.

- (v) Il y a plusieurs choses à vérifier :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{g}_3} \bar{h}(0) &= 0 \\ \mathcal{L}_{\bar{g}_3} \mathcal{L}_f \bar{h}(0) &= 0 \\ \mathcal{L}_{\bar{g}_3}^2 \bar{h}(0) &= 0 \\ \mathcal{L}_{[f, \bar{g}_3]} \bar{h}(0) &= 0 \\ \mathcal{L}_{\bar{g}_2} \bar{h}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons :

- 1 - $\mathcal{L}_{\bar{g}_3} \bar{h}(0) = d\bar{h}(\bar{g}_3)(0) = 0$ par définition.
- 2 - $\mathcal{L}_{\bar{g}_3} \mathcal{L}_f \bar{h}(0) = d\mathcal{L}_f \bar{h}(\bar{g}_3) = 0$ par définition.
- 3 - $\mathcal{L}_{\bar{g}_3}^2 \bar{h}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.
- 4 - $\mathcal{L}_{[f, \bar{g}_3]} \bar{h}(x) = 2x_1 (3x_3^2 + 1) + 2x_3$ donc $\mathcal{L}_{[f, \bar{g}_3]} \bar{h}(0) = 0$.
- 5 - $\mathcal{L}_{\bar{g}_2} \bar{h}(0) = d\bar{h}(\bar{g}_2)(0) = 0$ par définition.

- (vi) cette propriété est directement vérifiée par définition.

Nous calculons le changement de coordonnées associé aux champs de vecteurs $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$, i.e. défini par l'inverse de la fonction $(x_1, x_2, x_3) = \varphi(z_1, z_2, z_3)$, où φ est donné par

$$\varphi(z_1, z_2, z_3) = \exp(z_3 \bar{g}_3) \circ \exp(z_2 \bar{g}_2) \circ \exp(z_1 \bar{g}_1)(0) = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \\ z_1 + z_3 \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

donc :

$$(z_1, z_2, z_3) = \varphi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, -x_2 + x_3) \quad (3.110)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3^2 + 2 z_1 z_3 + z_2 + 2 z_1^2 + z_1 \\ \dot{z}_2 = z_3^3 + 3 z_1 z_3^2 + 3 z_1^2 z_3 + z_3 + z_2^3 + z_1 z_2 + z_1^3 + z_1^2 + z_1 \\ \dot{z}_3 = z_3^3 + 3 z_1 z_3^2 - z_3^2 + 3 z_1^2 z_3 - 2 z_1 z_3 + z_2^2 - z_2 + 2 z_1^3 - 2 z_1^2 - z_1 \\ h(z_1, z_2, z_3) = z_2^2 + z_1 \end{cases} \quad (3.111)$$

Le champ de vecteurs $f(z)$ est d'ordre supérieur à -1 et $h(z)$ est d'ordre plus grand que 3 par rapport aux poids $(r_1, r_2, r_3) = (3, 2, 1)$. Prenons l'approximation du système (3.111), nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + z_3^2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = 0 \\ \tilde{h}(z_1, z_2, z_3) = z_1 \end{cases} \quad (3.112)$$

Le drapeau associé au système (3.112) est donné par :

$$\begin{cases} \tilde{L}_1(0) = L_1(0) = \text{span}\{dz_1\} \\ \tilde{L}_2(0) = L_2(0) = \text{span}\{dz_1, dz_2\} \\ \tilde{L}_3(0) = L_3(0) = \text{span}\{dz_1, dz_2, dz_3\} \end{cases} \quad (3.113)$$

Dans les coordonnées d'origines, l'approximation s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3^2 - 2 x_2 x_3 + x_2^2 + x_1 \\ \dot{x}_3 = x_3^2 - 2 x_2 x_3 + x_2^2 + x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \quad (3.114)$$

3.4.2 Deuxième exemple

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + x_1 x_2 + x_3^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_2^3 \\ \dot{x}_3 = x_3^3 + x_1^2 + x_2^3 \\ h_1(x) = x_1^2 + x_2 \\ h_2(x) = x_3 \end{cases} \quad (3.115)$$

Notons f le champ de vecteurs associé à (3.115), c'est-à-dire que le système (3.115) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathbb{R}^3 \\ h_1(x) = x_1^2 + x_2 \\ h_2(x) = x_3 \end{cases} \quad (3.116)$$

Calculons d'abord l'espace d'observabilité associé au système (3.115).

$$\begin{aligned} dh_1(x) &= 2x_1 dx_1 + dx_2 \\ dh_2(x) &= dx_3 \\ d\mathcal{L}_f h_1(x) &= (2x_3^2 + 2x_3 + 2x_2^3 + 4x_1 x_2 + 1) dx_1 \\ &\quad + (6x_1 x_2^2 + 3x_2^2 + 2x_1^2 + 1) dx_2 \\ &\quad + (4x_1 x_3 + 2x_1) dx_3 \\ d\mathcal{L}_f h_2(x) &= (2x_1) dx_1 + (3x_2^2) dx_2 + (3x_3^2) dx_3 \end{aligned}$$

En $x = 0$, nous avons donc :

$$\begin{aligned} dh_1(0) &= dx_2 \\ dh_2(0) &= dx_3 \\ d\mathcal{L}_f h_1(0) &= dx_1 + dx_2 \\ d\mathcal{L}_f h_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.117)$$

et la condition d'observabilité du rang est remplie.

Définissons un drapeau sur le sous-espace des 1-formes engendré par la fonction h et ses dérivées de Lie le long du champ de vecteurs f :

$$L_1 = \text{span}\{dh_1, dh_2\} \quad (3.118)$$

$$L_2 = \text{span}\{dh_1, dh_2, d\mathcal{L}_f h_1, d\mathcal{L}_f h_2\} \quad (3.119)$$

Choisissons une "base" de ce drapeau, à l'origine :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1(x) &= d\bar{h}_1(x) = dh_1(x) \\ \bar{\omega}_2(x) &= d\bar{h}_2(x) = dh_2(x) \\ \bar{\omega}_3(x) &= d\bar{h}_3(x) = d\mathcal{L}_f h_1(x) \end{aligned} \quad (3.120)$$

Considérons les champs de vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(x) &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \bar{g}_2(x) &= \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \bar{g}_3(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (3.121)$$

Ces champs de vecteurs remplissent les conditions (i)-(vi) de l'hypothèse 3.1. Soit (V_j) la filtration définie dans l'hypothèse 3.1, nous avons $\bar{g}_3 \in V_1$, et $\bar{g}_2, \bar{g}_1 \in V_2$. De plus :

- (i) cette propriété est directement satisfaite,

- (ii) les champs de vecteurs $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ vérifient $[\bar{g}_i, \bar{g}_j] = 0$ pour tous les entiers i, j tels que $1 \leq i, j \leq 3$, donc cette propriété est aussi satisfaite,
- (iii) cette propriété est trivialement satisfaite,
- (iv) cette propriété est directement satisfaite, car $V_2 = V$, et donc $\forall g \in V_1, [f, g] \in V_2 = V$,
- (v) il suffit de vérifier

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\bar{g}_3} h_1(0) &= 0 \\ \mathcal{L}_{\bar{g}_3} h_2(0) &= 0\end{aligned}$$

Nous avons $\mathcal{L}_{\bar{g}_3} h_1(0) = dh_1(\bar{g}_3)(0) = 0$ et $\mathcal{L}_{\bar{g}_3} h_2(0) = dh_2(\bar{g}_3)(0) = 0$ par construction,

- (vi) cette propriété est directement vérifiée par définition.

Nous calculons ensuite le changement de coordonnées associé aux champs de vecteurs $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$, i.e. défini par l'inverse de la fonction $(x_1, x_2, x_3) = \varphi(z_1, z_2, z_3)$, où φ est donnée par :

$$\varphi(z_1, z_2, z_3) = \exp(z_3 \bar{g}_3) \circ \exp(z_2 \bar{g}_2) \circ \exp(z_1 \bar{g}_1)(0) = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_1 \\ z_2 + z_1 \end{pmatrix} \quad (3.122)$$

donc :

$$(z_1, z_2, z_3) = \varphi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 + x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (3.123)$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3 + z_1^3 + z_1 \\ \dot{z}_2 = z_3^2 - z_3 + z_2^3 + 3 z_1 z_2^2 + 3 z_1^2 z_2 + z_1^3 - z_1 \\ \dot{z}_3 = z_1 z_3 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 + z_2 + z_1^3 + z_1^2 + z_1 \\ h_1(z_1, z_2, z_3) = z_3^2 + z_1 \\ h_2(z_1, z_2, z_3) = z_2 + z_1 \end{cases} \quad (3.124)$$

$f(z)$ est d'ordre supérieur à -1 et $h_1(z)$ et $h_2(z)$ sont d'ordres supérieurs à 2 par rapport aux poids $(r_1, r_2, r_3) = (2, 2, 1)$. Prenons l'approximation du système (3.124), nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = 0 \\ \tilde{h}_1(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_3^2 \\ \tilde{h}_2(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 \end{cases} \quad (3.125)$$

Le drapeau associé au système (3.112) est donnée par :

$$\begin{cases} \tilde{L}_1(0) = L_1(0) = \text{span}\{dz_1, dz_2\} \\ \tilde{L}_2(0) = L_2(0) = \text{span}\{dz_1, dz_2, dz_3\} \end{cases} \quad (3.126)$$

Dans les coordonnées d'origine, l'approximation s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = 2x_1 \\ y_1 = x_2 + x_1^2 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (3.127)$$

Remarque 3.2. Dans les exemples précédents, le changement de coordonnées a été construit avec des champs de vecteurs qui remplissent les conditions (i)-(vi) de l'hypothèse 3.1, mais nous n'avons pas suivi la procédure donnée les équations (3.53)-(3.55) pour la construction. En général, un changement de coordonnées qui donne une approximation homogène n'est pas unique et peut être difficile à obtenir.

3.5 Conclusion

Nous avons construit, dans ce chapitre, une approximation homogène pour un système multi-sorties et sans entrée, satisfaisant une condition du rang à l'origine. De plus, cette approximation garde les termes importants relativement à l'observabilité. Nous avons montré, en particulier, que l'approximation et le système original possèdent le même espace d'observabilité. La méthode, proposée ici, pour obtenir l'approximation homogène est toujours valide, mais cette construction peut être difficile à réaliser malgré le fait qu'elle soit explicite. Nous avons donc montré, sur des exemples, que la construction développée ici n'est pas unique et peut être modifiée afin de rendre les calculs plus faciles. Les résultats exposés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une communication en conférence dans [Ménard *et al.* \(2011\)](#).

L'intérêt de cette construction est d'obtenir une approximation spécialement adaptée au drapeau d'observabilité. Nous verrons dans le prochain chapitre que cette construction permet de construire un observateur local performant.

CHAPITRE 4

CONSTRUCTION D'UN OBSERVATEUR LOCAL

Sommaire

4.1	Introduction	95
4.2	Construction d'un observateur local	95
4.2.1	Construction de l'observateur en utilisant l'approximation homogène	95
4.2.1.1	Construction d'un observateur linéaire	96
4.2.1.2	Construction d'un observateur homogène	101
4.2.2	Construction d'un observateur en utilisant une approximation linéaire	102
4.3	Simulations	104
4.3.1	Premier exemple	106
4.3.1.1	Construction de l'observateur par l'approximation homogène	106
4.3.1.2	Construction de l'observateur par l'approximation linéaire	109
4.3.1.3	Simulation et comparaison des deux méthodes	110
4.3.2	Deuxième exemple	114
4.3.2.1	Construction de l'observateur par l'approximation homogène	114
4.3.2.2	Construction de l'observateur par l'approximation linéaire	116
4.3.2.3	Simulation et comparaison des deux méthodes	117
4.3.3	Troisième exemple	121
4.3.3.1	Construction de l'observateur par l'approximation homogène	121
4.3.3.2	Construction de l'observateur par l'approximation linéaire	123

4.3.3.3	Simulation et comparaison des deux méthodes	124
4.4	Conclusion	128

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous utilisons l'approximation homogène développée précédemment afin de synthétiser un observateur. Nous avons vu qu'il n'existe pas de méthodologie générale pour la construction d'observateurs, c'est pourquoi nous proposons ici une approche basée sur une approximation. Les avantages d'une telle méthode sont qu'elle s'applique à une grande classe de systèmes et qu'elle est simple à mettre en place. En effet, le système considéré est moins complexe que l'original. En contrepartie, nous ne pouvons obtenir qu'une convergence locale, car, dans le cas général, nous ne prenons en compte qu'une partie de la sortie. Cette méthode ne s'appliquera donc qu'à des systèmes dont l'état reste autour du point de fonctionnement, où l'approximation reste valide. Ce chapitre sera décomposé comme suit. Dans la première partie, nous donnons notre construction qui est basée sur les résultats du chapitre précédent. Nous montrerons également que l'observateur proposé ici est localement convergent pour un système stable au sens de Lyapunov. Une construction similaire utilisant une approximation linéaire sera également rappelée. Dans la seconde partie, nous appliquons notre approche sur des exemples précis. Nous comparerons les performances de la démarche proposée ici avec un observateur issu d'une linéarisation.

4.2 Construction d'un observateur local

Nous allons appliquer directement la construction établie dans le chapitre précédent à un système mono-sortie. Nous considérons donc un système sans entrée :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.1)$$

tel que $f \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ et :

$$\dim \left(\text{span} \{ d\mathcal{L}_f^k h(0), k = 0, \dots, n-1 \} \right) = n \quad (4.2)$$

Ce système vérifie donc la condition d'observabilité du rang.

4.2.1 Construction de l'observateur en utilisant l'approximation homogène

D'après les résultats du chapitre précédent, il existe un changement de variables

$$x = \varphi(z). \quad (4.3)$$

et des poids $r_i = n - i$, $i = 1, \dots, n$ tels que, dans les nouvelles coordonnées z , nous pouvons écrire f et h sous la forme :

$$f(z) = \sum_{l=-1}^{+\infty} f_l(z), \quad (4.4)$$

$$h(z) = \sum_{l=r_1}^{+\infty} h_l(z) \quad (4.5)$$

où, pour tout l , le champ de vecteurs f_l et la fonction h_l sont homogènes de degré l par rapport aux poids (r_1, \dots, r_n) .

Nous définissons l'approximation du système (4.1) par :

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{f}(z) \\ y = \tilde{h}(z) \end{cases} \quad (4.6)$$

où $\tilde{f}(z) = f_{-1}(z)$ et $\tilde{h}(z) = h_{r_1}(z)$. Nous allons donc maintenant construire un observateur pour le système approximant (4.6).

Afin de construire un observateur, nous effectuons un nouveau changement de variables sur l'approximation. Le nouveau changement de variables est donné par :

$$\xi = \Phi_h(z) = \begin{pmatrix} \tilde{h}(z) \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}} \tilde{h}(z) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}}^{n-1} \tilde{h}(z) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Dans les nouvelles coordonnées ξ , le système (4.6) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n \\ \dot{\xi}_n = 0 \\ y = \xi_1 \end{cases} \quad (4.8)$$

4.2.1.1 Construction d'un observateur linéaire

Pour un système de la forme (4.8), nous pouvons construire l'observateur suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_1 = \hat{\xi}_2 - k_1(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \\ \dot{\hat{\xi}}_2 = \hat{\xi}_3 - k_2(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_{n-1} = \hat{\xi}_n - k_{n-1}(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \\ \dot{\hat{\xi}}_n = -k_n(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \end{cases} \quad (4.9)$$

où les gains $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont donnés par

$$K = [k_1, \dots, k_n]^T = S_\infty(\theta)^{-1} C_c^T \quad (4.10)$$

avec $S_\infty(\theta)$, solution de l'équation de Riccati stationnaire suivante :

$$\begin{cases} \theta S_\infty(\theta) + A_c^T S_\infty(\theta) + S_\infty(\theta) A_c - C_c^T C_c = 0 \\ S_\infty(\theta) = S_\infty(\theta)^T \end{cases} \quad (4.11)$$

(A_c, C_c) sont sous forme canonique d'observabilité, i.e :

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C_c = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0) \quad (4.12)$$

Nous rajoutons un gain pour cet observateur, car dans le cas général, il y a des perturbations, qui peuvent être gérées en agissant sur le gain.

Dans les coordonnées originales x , l'observateur pour le système (4.6) est donc égal à :

$$\dot{\hat{x}} = \tilde{f}(\hat{x}) - \overline{K}_h(\hat{x}).(\tilde{h}(\hat{x}) - \tilde{h}(x)) \quad (4.13)$$

où $\overline{K}_h(\hat{x})$ est donné par

$$\overline{K}_h(\hat{x}) = \frac{\partial(\varphi \circ \Phi_h^{-1})}{\partial \xi} (\Phi_h \circ \varphi^{-1}(\hat{x})) . K \quad (4.14)$$

Nous utilisons les gains calculés pour l'approximation afin de définir un observateur pour le système complet. Nous obtenons donc l'observateur suivant pour le système (4.1) :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) - \overline{K}_h(\hat{x}).(h(\hat{x}) - h(x)) \quad (4.15)$$

et nous avons le résultat de stabilité suivant, qui est une application du théorème 1 dans [Sundarapandian \(2002\)](#), pour l'approximation homogène développée dans ce mémoire.

Proposition 4.1. *Supposons que le système (4.1) soit stable à l'origine (au sens de Lyapunov), alors il existe un voisinage \mathcal{U} de l'origine et un réel $\theta > 0$ tels que l'observateur donné par (4.15) soit convergent sur \mathcal{U} . C'est-à-dire, pour tout $x_0, \hat{x}_0 \in \mathcal{U}$*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \hat{x}(t) - x(t) = 0. \quad (4.16)$$

où $x(t)$ est la solution du système (4.1) ayant pour condition initiale x_0 et $\hat{x}(t)$ est la solution du système (4.15) ayant pour condition initiale \hat{x}_0 .

Remarque 4.1. *La stabilité du système (4.1) sert à assurer que les solutions restent dans le domaine de validité de l'approximation.*

Démonstration. Nous allons prouver la stabilité de l'observateur dans les coordonnées ξ définies par (4.3) et (4.7). La stabilité est conservée par changement de variables, donc la convergence sera établie pour toutes les coordonnées.

Dans les coordonnées z , définies par (4.3), nous pouvons décomposer le système (4.1) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{f}(z) + R_f(z) \\ y = \tilde{h}(z) + R_h(z) \end{cases} \quad (4.17)$$

où $\tilde{f}(z) = f_{-1}(z)$, $\tilde{h}(z) = h_{r_1}(z)$ et R_f, R_h sont les restes. Après le second changement de variables $\xi = \Phi_h(z)$, le système (4.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_c \xi + \frac{\partial \Phi_h}{\partial z}(\Phi_h^{-1}(\xi)) \cdot R_f(\Phi_h^{-1}(\xi)) \\ \quad \triangleq F(\xi) \\ h(\xi) = \xi_1 + R_h(\Phi_h^{-1}(\xi)) \end{cases} \quad (4.18)$$

L'observateur (4.15), dans ces coordonnées, est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}} &= A_c \hat{\xi} - (\hat{\xi}_1 - \xi_1) \cdot K + \frac{\partial \Phi_h}{\partial z}(\Phi_h^{-1}(\hat{\xi})) \cdot R_f(\Phi_h^{-1}(\hat{\xi})) + \left(R_h(\Phi_h^{-1}(\hat{\xi})) - R_h(\Phi_h^{-1}(\xi)) \right) \cdot K \\ &\triangleq G(\hat{\xi}, h(\xi)) - F(\xi) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Le vecteur des gains K est donné par (4.10).

Nous allons maintenant appliquer le Théorème 1 dans [Sundarapandian \(2002\)](#). En effet, supposons que l'origine soit un point d'équilibre, stable au sens de Lyapunov, pour le système (4.1). Alors, d'après ce théorème, le système (4.15) est un observateur local pour (4.1) si :

(a) la sous variété définie via $e = 0$ est invariante sous le flot du système composé :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = F(\xi) \\ \dot{e} = G(e + \xi, h(\xi)) - F(\xi), \quad e = \hat{\xi} - \xi \end{cases} \quad (4.20)$$

(b) le point d'équilibre $e = 0$ du système

$$\dot{e} = G(e, 0) \quad (4.21)$$

est localement exponentiellement stable.

Preuve de (a)

La fonction G vérifie $G(\xi, h(\xi)) = F(\xi)$, la sous variété définie par $e = 0$ est donc invariante sous le flot du système composé (4.20).

Preuve de (b)

Le système (4.21) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\dot{e} = A_c e - K e_1 + \frac{\partial \Phi_h}{\partial z}(\Phi_h^{-1}(e)) \cdot R_f(\Phi_h^{-1}(e)) + (R_h(\Phi_h^{-1}(e))) \cdot K \quad (4.22)$$

Contrairement au cas d'une approximation linéaire, les non linéarités présentes ici ne sont pas forcément d'ordres supérieurs à deux (par rapport à l'ordre classique), ces termes possèdent une partie linéaire non nulle. Cependant, leurs parties linéaire possèdent une structure triangulaire, ce qui nous permettra d'appliquer, la même méthode que dans [Gauthier *et al.* \(1992\)](#). Nous allons donc montrer dans un premier temps que les non linéarités peuvent s'écrire comme la somme d'une partie linéaire possédant une structure triangulaire et d'une partie dont les termes sont d'ordres supérieurs ou égaux à deux. Dans un second temps, à l'aide d'une fonction de Lyapunov, nous allons montrer que le système (4.21) est localement asymptotiquement stable.

Partie 1 Nous allons tout d'abord établir les propriétés sur les non linéarités dans les coordonnées z . Puis nous montrerons que les propriétés désirées sont transmises par le changement de variables (4.7).

Par construction, nous savons que dans les coordonnées z , le champ de vecteurs $z \rightarrow R_f(z)$ est une somme de champs de vecteurs homogènes de degrés supérieurs ou égaux à 0, pour les poids $r_i = n - i$, $i = 1, \dots, n$. De plus, la fonction à valeurs réelles $z \rightarrow R_h(z)$ est une somme de fonctions homogènes de degrés supérieurs ou égaux à $r_1 + 1 = n$.

La fonction Φ_l définie par (4.7) est homogène de degré 0 par rapport aux poids $r_i = n - i$, $i = 1, \dots, n$ (au sens d'un champ de vecteurs), donc d'après le lemme 4.1, la fonction inverse Φ_l^{-1} est homogène de degré 0 par rapport aux poids $r_i = n - i$, $i = 1, \dots, n$.

D'après les propriétés de $z \rightarrow R_f(z)$, $z \rightarrow R_h(z)$ et de Φ_l et Φ_l^{-1} , on montre directement que le champ de vecteurs

$$e \rightarrow \frac{\partial \Phi_h}{\partial z} (\Phi_h^{-1}(e)) . R_f (\Phi_h^{-1}(e)) \quad (4.23)$$

est une somme de champs de vecteurs homogènes de degrés supérieurs ou égaux à 0 par rapport à $(r_i)_{1 \leq i \leq n}$, c'est-à-dire que pour $1 \leq i \leq n$, la i -ème coordonnées de ce champ de vecteurs est une somme de fonctions de degrés supérieurs ou égaux à $r_i + 1$, donc

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \Phi_h}{\partial z} (\Phi_h^{-1}(e)) . R_f (\Phi_h^{-1}(e)) \right)_i}{\partial e_j} (0) = 0, \quad j \geq i + 1 \quad (4.24)$$

ce qui montre que la partie linéaire de ce champ de vecteurs possède une structure triangulaire. On peut donc écrire

$$\frac{\partial \Phi_h}{\partial z} (\Phi_h^{-1}(e)) . R_f (\Phi_h^{-1}(e)) = R_f^l(e) + R_f^n(e) \quad (4.25)$$

où R_f^l est un champ de vecteurs linéaire ayant une structure triangulaire, et R_f^n est un champ de vecteurs qui ne possède pas de partie linéaire.

De même, la fonction

$$e \rightarrow (R_h(\Phi_h^{-1}(e))) \quad (4.26)$$

est une somme de fonctions homogènes de degrés supérieurs à n , ce qui signifie que cette fonction ne possède pas de partie linéaire.

Partie 2 Considérons la fonction de Lyapunov $V(e) = e^T S_\infty(\theta)e$, où $S_\infty(\theta)$ est solution de l'équation (4.11). Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^T S_\infty(\theta)e)_{|(4.21)} &= -\theta e^T S_\infty(\theta)e - (C_c e)^2 + 2e^T S_\infty(\theta) \cdot \left(R_f^l(e) \right) \\ &\quad + 2e^T S_\infty(\theta) \left(R_f^n(e) + (R_h(\Phi_h^{-1}(e))).K \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

D'après la preuve du théorème 3 dans [Gauthier et al. \(1992\)](#), comme chaque coordonnée de R_f^l est globalement l -Lipschitz (car composée de termes linéaires), il existe une constante $\kappa = \kappa(l, n)$ telle que

$$-\theta e^T S_\infty(\theta)e - (C_c e)^2 + 2e^T S_\infty(\theta) \cdot \left(R_f^l(e) \right) \leq \left(-\frac{\theta}{2} + \kappa \right) \|e\|_{S_\infty(\theta)}^2 \quad (4.28)$$

On fixe $\theta_0 \geq 0$ tel que $-\theta_0/2 + \kappa < -1$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^T S_\infty(\theta_0)e)_{|(4.21)} &\leq -\|e\|_{S_\infty(\theta_0)}^2 \\ &\quad + 2e^T S_\infty(\theta_0) \left(R_f^n(e) + (R_h(\Phi_h^{-1}(e))).K \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

La fonction $e \rightarrow \left(R_f^n(e) + (R_h(\Phi_h^{-1}(e))).K \right)$ est continûment dérivable, et ne possède pas de terme linéaire, donc d'après ([Khalil, 2000](#), page 138), pour tout $\gamma > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$\|e\|_{S_\infty(\theta_0)} < \epsilon \Rightarrow \frac{\|R_f^n(e) + (R_h(\Phi_h^{-1}(e))).K\|_{S_\infty(\theta_0)}}{\|e\|_{S_\infty(\theta_0)}} < \gamma \quad (4.30)$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^T S_\infty(\theta_0)e)_{|(4.21)} &\leq -\|e\|_{S_\infty(\theta_0)}^2 + 2\gamma \|S_\infty(\theta_0)\|_{S_\infty(\theta_0)} \cdot \|e\|_{S_\infty(\theta_0)}^2 \\ &\leq (-1 + 2\gamma \|S_\infty(\theta_0)\|_{S_\infty(\theta_0)}) \|e\|_{S_\infty(\theta_0)}^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Donc, il suffit de choisir $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que l'on ait

$$\gamma < \frac{1}{2\|S_\infty(\theta_0)\|_{S_\infty(\theta_0)}} \quad (4.32)$$

pour que le système (4.21) soit localement asymptotiquement stable. Ce qui termine la démonstration. □

4.2.1.2 Construction d'un observateur homogène

Nous voulons mettre en valeur le fait que l'approximation construite soit homogène, et construire ainsi un observateur de telle façon que le système d'erreur soit homogène. En effet, la fonction utilisée pour le deuxième changement de variables $u = \Phi_h(z)$ est homogène (au sens d'un champ de vecteurs). Or nous avons le résultat suivant :

Lemme 4.1. *Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme, homogène de degré d par rapport aux poids (r_1, \dots, r_n) (au sens d'un champ de vecteurs). Alors la fonction réciproque Φ^{-1} est homogène de degré $-d$ par rapport aux poids $r_i + d$.*

Démonstration. Nous avons l'identité suivante :

$$\Phi^{-1}(\Phi(z)) = z \quad (4.33)$$

donc

$$\Phi^{-1}(\Phi(\lambda^{r_1} z_1, \dots, \lambda^{r_n} z_n)) = (\lambda^{r_1} z_1, \dots, \lambda^{r_n} z_n) \quad (4.34)$$

Comme la fonction Φ est homogène, nous obtenons :

$$\Phi^{-1}(\lambda^{r_1+d} \Phi_1(z), \dots, \lambda^{r_n+d} \Phi_n(z)) = (\lambda^{r_1} z_1, \dots, \lambda^{r_n} z_n) \quad (4.35)$$

En posant $\bar{z} = \Phi(z)$ (et donc $z = \Phi^{-1}(\bar{z})$), nous avons :

$$\Phi^{-1}(\lambda^{r_1+d} \bar{z}_1, \dots, \lambda^{r_n+d} \bar{z}_n) = (\lambda^{(r_1+d)-d} (\Phi^{-1})_1(\bar{z}), \dots, \lambda^{(r_n+d)-d} (\Phi^{-1})_n(\bar{z})) \quad (4.36)$$

Cette égalité étant vraie pour tout \bar{z} dans \mathbb{R}^n , car Φ est un difféomorphisme, c'est exactement la définition de l'homogénéité voulue. \square

La fonction utilisée pour le deuxième changement de variables, $\xi = \Phi_h(z)$ (donnée par (4.7)), est homogène de degré 0 par rapport aux poids (r_1, \dots, r_n) , en effet :

$$\Phi_h(\lambda^{r_1} z_1, \dots, \lambda^{r_n} z_n) = \left(\tilde{h}(\delta_\lambda^r z), \dots, \mathcal{L}_{\tilde{f}}^{n-1} \tilde{h}(\delta_\lambda^r z) \right) = \left(\lambda^{r_1} \tilde{h}(z), \dots, \lambda^{r_n} \mathcal{L}_{\tilde{f}}^{n-1} \tilde{h}(z) \right) \quad (4.37)$$

donc d'après le lemme (4.1), la fonction réciproque Φ_h^{-1} est homogène de degré 0 par rapport aux poids (r_1, \dots, r_n) . Donc le système (4.8) est homogène de degré -1 par rapport aux poids (r_1, \dots, r_n) . En effet :

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{\partial \Phi_h}{\partial z}(\Phi_h^{-1}(\xi)) \cdot \tilde{f}(\Phi_h^{-1}(\xi)) \quad (4.38)$$

Cela permet d'obtenir un candidat pour un observateur homogène, donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_1 = \hat{\xi}_2 - k_1(\hat{\xi}_1 - \xi_1)^{\alpha_1} \\ \dot{\hat{\xi}}_2 = \hat{\xi}_3 - k_2(\hat{\xi}_1 - \xi_1)^{\alpha_2} \\ \vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_{n-1} = \hat{\xi}_n - k_{n-1}(\hat{\xi}_1 - \xi_1)^{\alpha_{n-1}} \\ \dot{\hat{\xi}}_n = -k_n(\hat{\xi}_1 - \xi_1)^{\alpha_n} \end{cases} \quad (4.39)$$

Il reste à choisir les puissances $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, de telle façon que le système d'erreur soit homogène. Nous pouvons donc appliquer le lemme 2.3, ce qui donne :

$$\alpha_i = n - i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.40)$$

Le problème de ce choix pour les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ est que le dernier terme α_n est nul. Or une fonction homogène continue de degré nul est constante. Ici, le choix d'un terme constant est impossible, car dans ce cas la dérivée de la dernière coordonnée serait constante et le système d'erreur ne pourrait être asymptotiquement stable. Il est donc nécessaire de considérer une fonction discontinue, par exemple, une fonction signe. Malheureusement, cela nous oblige à considérer des systèmes discontinus, pour lesquels une preuve de convergence peut se révéler très difficile. De plus, le réglage des gains n'est pas aussi direct que dans le cas linéaire, car il n'existe pas de méthodologie simple et générale comme dans le cas linéaire, et cela pose des problèmes pour la simulation numérique. Nous ne considérerons donc pas un tel observateur dans ce mémoire.

4.2.2 Construction d'un observateur en utilisant une approximation linéaire

Nous allons comparer l'observateur que nous avons construit avec une approche directe, qui consiste à prendre l'approximation constituée seulement des termes linéaires. Considérons à nouveau le système (4.1). Soit \tilde{f}_l et \tilde{h}_l les parties linéaires de f et h respectivement. Nous devons donc construire un observateur pour le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{f}_l(x) \\ y = \tilde{h}_l(x) \end{cases} \quad (4.41)$$

Afin de pouvoir comparer de manière plus efficace les deux approches, nous effectuons un changement de variables similaire au deuxième changement de variables (4.7) pour l'approche correspondante à l'approximation homogène, nous définissons :

$$\Phi_l(x) = \begin{pmatrix} h_l(x) \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}_l} h_l(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}_l}^{n-1} h_l(x) \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Considérons les nouvelles variables

$$\xi = \Phi_l(x) \quad (4.43)$$

Dans ces nouvelles coordonnées, l'approximation linéaire s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n \\ \dot{\xi}_n = r(\xi) \\ y = \xi_1 \end{cases} \quad (4.44)$$

Nous pouvons construire directement un observateur, de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_1 = \hat{\xi}_2 - k_1(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \\ \dot{\hat{\xi}}_2 = \hat{\xi}_3 - k_2(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_{n-1} = \hat{\xi}_n - k_{n-1}(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \\ \dot{\hat{\xi}}_n = r(\hat{\xi}) - k_n(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \end{cases} \quad (4.45)$$

où les gains $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont donnés par

$$K = [k_1, \dots, k_n]^T = S_\infty(\theta)^{-1} C_c^T \quad (4.46)$$

et $S_\infty(\theta)$ est solution de l'équation de Riccati stationnaire suivante :

$$\begin{cases} \theta S_\infty(\theta) + A_c^T S_\infty(\theta) + S_\infty(\theta) A_c - C_c^T C_c = 0 \\ S_\infty(\theta) = S_\infty(\theta)^T \end{cases} \quad (4.47)$$

Dans les coordonnées originales x , l'observateur pour le système linéaire est donc donné par

$$\dot{\hat{x}} = f_l(\hat{x}) - \overline{K}_l(h_l(\hat{x}) - h_l(x)) \quad (4.48)$$

où les gains \overline{K}_l sont donnés par :

$$\overline{K}_l = \frac{\partial \Phi_l^{-1}}{\partial \xi}(\Phi_l(\hat{x})).K \quad (4.49)$$

Comme nous pouvons le constater, les gains devraient dépendre de l'état estimé \hat{x} , mais comme le système considéré est linéaire, le changement de variables est également linéaire, et donc les jacobiens des fonctions Φ_l et Φ_l^{-1} sont constants.

Nous utilisons les gains calculés pour l'approximation, afin de définir un observateur pour le système complet. Nous obtenons donc l'observateur suivant, pour le système (4.1)

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) - \overline{K}_l.(h(\hat{x}) - h(x)) \quad (4.50)$$

et nous avons le résultat de stabilité suivant :

Proposition 4.2. (*Sundarapandian, 2002, Théorème 1*) Supposons que le système (4.1) soit stable à l'origine (au sens de Lyapunov), alors il existe un voisinage \mathcal{U} de l'origine, il existe $\theta > 0$, tel que l'observateur donné par (4.50) soit convergent sur ce voisinage. C'est-à-dire, pour tout $x_0, \hat{x}_0 \in \mathcal{U}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \hat{x}(t) - x(t) = 0 \quad (4.51)$$

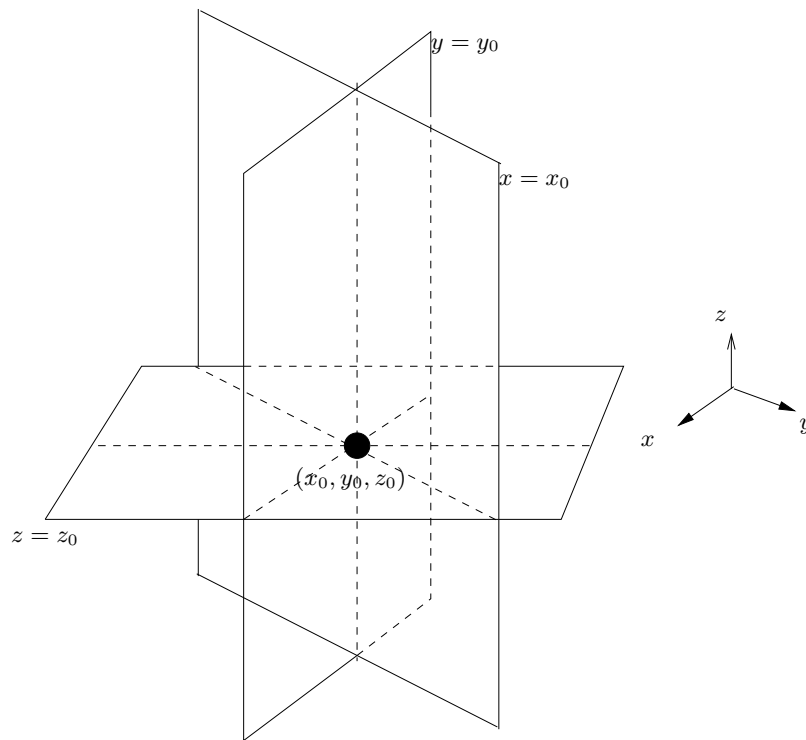
où $x(t)$ est la solution du système (4.1) ayant pour condition initiale x_0 et $\hat{x}(t)$ est la solution du système (4.48) ayant pour condition initiale \hat{x}_0 .

4.3 Simulations

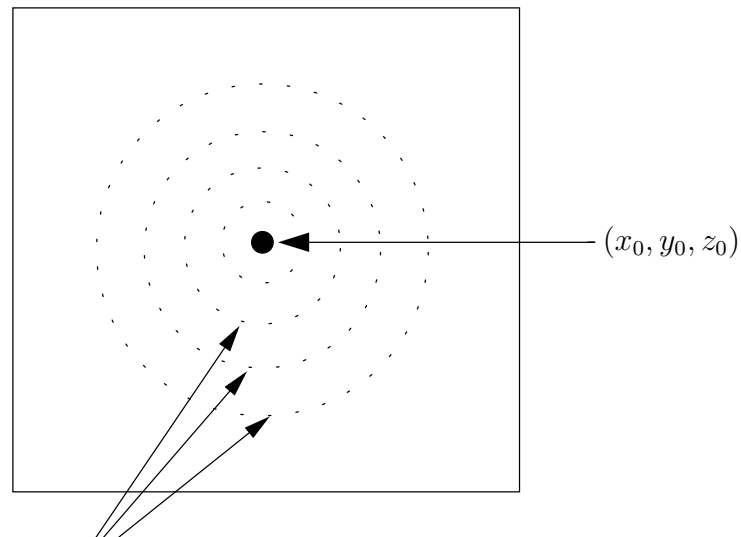
Dans cette section, nous allons considérer plusieurs exemples précis, afin d'appliquer la construction développée dans la section précédente et de la comparer avec la construction utilisant une approximation linéaire. En effet, nous avons vu que dans les deux cas, il y a convergence locale. Nous allons donc comparer les deux observateurs d'un point de vue qualitatif, c'est-à-dire en comparant le domaine de convergence ainsi que la sensibilité au gain.

Afin de comparer efficacement les deux observateurs que nous avons construits, nous allons procéder comme suit : pour une condition initiale (x_0, y_0, z_0) du système original donnée et pour un gain de l'observateur donné, nous allons tester pour quelles conditions initiales l'observateur converge, en un temps donné.

Nous considérons ici des systèmes à trois dimensions. Afin de prendre des conditions initiales pour l'observateur uniformément réparties autour de la condition initiale du système original, nous considérons un maillage régulier sur les coordonnées sphériques centrées en la condition initiale. Mais comme il est difficile de représenter clairement un schéma à trois dimensions dans un livre, nous ne montrerons les résultats de simulations que pour des conditions initiales sur des plans passant par la condition initiale du système original. En particulier, nous prendrons les plans correspondants à $x = x_0$, $y = y_0$ et $z = z_0$, représentés par la figure suivante :



Sur chaque plan, nous considérons des conditions initiales que nous testerons pour chaque observateurs :



Conditions initiales pour les observateurs

Sur les axes, nous noterons la différence entre la condition initiale (x_0, y_0, z_0) du système original et la condition initiale $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0)$ de l'observateur, c'est-à-dire, $(x_0 - \hat{x}_0, y_0 - \hat{y}_0, z_0 - \hat{z}_0)$.

Les conditions initiales seront représentées par des petits cercles, les cercles rouges correspondent à des conditions initiales pour lesquelles l'observateur converge et les cercles jaunes correspondent à des conditions initiales pour lesquels l'observateur ne converge pas.

Le critère de convergence d'une condition initiale pour un observateur est la suivante. Si on note $x(t)$ la solution du système original (4.53) issue de (x_0, y_0, z_0) , et $\hat{x}_h(t)$ (resp. $\hat{x}_l(t)$) la solution du système (4.65) (resp. du système (4.70)) issue de $(\hat{x}_0^h, \hat{y}_0^h, \hat{z}_0^h)$, (resp. de $(\hat{x}_0^l, \hat{y}_0^l, \hat{z}_0^l)$). Alors la condition initiale $(\hat{x}_0^h, \hat{y}_0^h, \hat{z}_0^h)$ pour l'observateur (4.65) (resp. la condition initiale $(\hat{x}_0^l, \hat{y}_0^l, \hat{z}_0^l)$ pour l'observateur (4.70)) sera dite convergente si :

$$\begin{aligned} \max_{i=1,2,3} |x_i(t_{simu}) - x_i^h(t_{simu})| &< \varepsilon_{simu} \\ (\text{resp. } \max_{i=1,2,3} |x_i(t_{simu}) - x_i^l(t_{simu})| &< \varepsilon_{simu}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

pour un temps de simulation $t_{simu} = 30s$ et une erreur $\varepsilon_{simu} = 0.001$. Dans toute cette section, nous appellerons, par abus de notation, domaine de convergence l'ensemble des conditions initiales qui sont convergentes pour $\varepsilon_{simu} = 0.001$ et $t_{simu} = 30s$.

4.3.1 Premier exemple

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_2^2 - x_3^3 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_2 + x_1 - x_3^3 - x_1^5 \\ \dot{x}_3 = -x_3^5 - x_2^3 \\ y = h(x) = x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2 \end{cases} \quad (4.53)$$

Alors le système (4.53) vérifie la condition du rang, en effet :

$$\begin{aligned} dh(0) &= dx_2 \\ d\mathcal{L}_f h(0) &= dx_3 - dx_2 + dx_1 \\ d\mathcal{L}_f^2 h(0) &= -2dx_1 + 2dx_2 - dx_3 \end{aligned}$$

4.3.1.1 Construction de l'observateur par l'approximation homogène

Nous construisons ici l'observateur (4.15) pour le système (4.53). Nous devons calculer les gains donnés par (4.14). Et donc nous avons besoin des deux changements de variables (4.3) et (4.7).

Calcul du premier changement de variables Afin d'appliquer la méthodologie développée au chapitre 3, dans un premier temps, nous définissons une base pour le

drapeau, donnée par :

$$\begin{aligned} d\bar{h}_1 &= dh \\ d\bar{h}_2 &= d\mathcal{L}_f h \\ d\bar{h}_3 &= d\mathcal{L}_f^2 h \end{aligned}$$

Nous pouvons alors construire une base duale de champs de vecteurs qui vérifie l'hypothèse 3.1 :

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(x) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \bar{g}_2(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \bar{g}_3(x) &= -\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Nous obtenons un difféomorphisme par :

$$\varphi(z) = \exp(z_3 \bar{g}_3) \circ \exp(z_2 \bar{g}_2) \circ \exp(z_1 \bar{g}_1)(0) \quad (4.54)$$

on a donc :

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} -z_3 + z_2 \\ -z_3^2 + z_1 + 2z_2 z_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

et

$$\varphi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_1 x_3 - x_3^2 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Dans les nouvelles coordonnées $z = \varphi^{-1}(x)$, on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2z_3^7 + 10z_2 z_3^6 - 12z_2^2 z_3^5 + 2z_2 z_3^5 + 6z_1 z_3^5 - z_3^5 - 8z_2^3 z_3^4 \\ &\quad - 18z_1 z_2 z_3^4 + 3z_2 z_3^4 + 2z_3^4 + 16z_2^4 z_3^3 + 2z_2^2 z_3^3 - 6z_1^2 z_3^3 \\ &\quad + 4z_1 z_3^3 + z_3^3 + 24z_1 z_2^3 z_3^2 - 10z_2^3 z_3^2 + 6z_1^2 z_2 z_3^2 - 8z_1 z_2 z_3^2 \\ &\quad - 4z_2 z_3^2 - z_3^2 + 5z_2^4 z_3 + 12z_1^2 z_2^2 z_3 + 2z_1^3 z_3 - 2z_1^2 z_3 - 2z_1 z_3 \\ &\quad - z_2^5 + 2z_1^3 z_2 + z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 &= 2z_3^6 - 12z_2 z_3^5 - z_3^5 + 24z_2^2 z_3^4 - 6z_1 z_3^4 + z_3^4 - 16z_2^3 z_3^3 \\ &\quad + 24z_1 z_2 z_3^3 - 4z_2 z_3^3 - z_3^3 - 24z_1 z_2^2 z_3^2 + 4z_2^2 z_3^2 \\ &\quad + 6z_1^2 z_3^2 - 2z_1 z_3^2 - z_3^2 - 12z_1^2 z_2 z_3 + 4z_1 z_2 z_3 + 2z_2 z_3 \\ &\quad + z_3 - z_2 - 2z_1^3 + z_1^2 + z_1 \\ \dot{z}_3 &= z_3^6 - 6z_2 z_3^5 - z_3^5 + 12z_2^2 z_3^4 - 3z_1 z_3^4 - 8z_2^3 z_3^3 + 12z_1 z_2 z_3^3 \\ &\quad - 12z_1 z_2^2 z_3^2 + 3z_1^2 z_3^2 - 6z_1^2 z_2 z_3 - z_1^3 \\ y &= h(\varphi(z)) \triangleq H_1(z) = z_1 + z_2 z_3 + z_2^2 \end{aligned} \right. \quad (4.57)$$

donc l'approximation est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_3^2 + z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = 0 \\ \tilde{H}_1(z) = z_1 + z_2 z_3 \end{cases} \quad (4.58)$$

Dans la suite, nous noterons $\tilde{f}(z)$ le champ de vecteurs associé au système (4.58).

Calcul du deuxième changement de variables Par définition :

$$\xi = \Phi_h(z) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_1(z) \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}} \tilde{H}_1(z) \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}}^2 \tilde{H}_1(z) \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Donc :

$$\Phi_h(z) = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 z_3 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

De plus, on a l'inverse :

$$\Phi_h^{-1}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 \xi_3 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

Construction de l'observateur Le changement de variables pour passer des coordonnées x aux coordonnées ξ est égal à :

$$\xi = \Phi_h \circ \varphi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

et l'inverse :

$$x = \varphi \circ \Phi_h^{-1}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_2 - \xi_3 \\ -\xi_3^2 + \xi_1 + \xi_2 \xi_3 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

Ainsi :

$$\overline{K}_h(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 2\theta - \theta^3 \\ 2\theta + \theta^3 \hat{x}_1 + (2\theta^2 - \theta^3) \hat{x}_3 \\ \theta^3 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

avec $K = [2\theta, 2\theta^2, \theta^3]^T$. L'observateur obtenu est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_2^2 - \hat{x}_3^3 - \hat{x}_2^3 \\ &\quad -(2\theta - \theta^3)((\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{x}_3^2) - (x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_1^2)) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 - \hat{x}_2 + \hat{x}_1 - \hat{x}_3^3 - \hat{x}_1^5 \\ &\quad -(2\theta + \theta^3\hat{x}_1 + (2\theta^2 - \theta^3)\hat{x}_3)((\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{x}_3^2) - (x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_1^2)) \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_3^5 - \hat{x}_2^3 - (\theta^3)((\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{x}_3^2) - (x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_1^2)) \end{cases} \quad (4.65)$$

4.3.1.2 Construction de l'observateur par l'approximation linéaire

Dans cette section, nous construisons l'observateur (4.50) pour le système (4.53). Le linéarisé du système (4.53) est égal à :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_2 + x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ \tilde{H}_2(x) = x_2 \end{cases} \quad (4.66)$$

Calcul du changement de variables Le changement de variables (4.43) pour le système (4.66) est donné par :

$$\xi = \Phi_l(x) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_l(x) \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}_l} \tilde{h}_l(x) \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}_l}^2 \tilde{h}_l(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

et la fonction inverse par :

$$\Phi_l^{-1}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_1 \\ 2\xi_1 + \xi_3 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

Construction de l'observateur

Les gains (4.49) sont égaux à :

$$\bar{K}_l = \begin{pmatrix} 2\theta - 2\theta^2 - \theta^3 \\ 2\theta \\ 2\theta^2 + \theta^3 \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

avec $K = [2\theta, 2\theta^2, \theta^3]^T$. L'observateur (4.50) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_2^2 - \hat{x}_3^3 - \hat{x}_2^3 \\ \quad - (2\theta - 2\theta^2 - \theta^3)((\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{x}_3^2) - (x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2)) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - \hat{x}_2 + \hat{x}_1 - \hat{x}_3^3 - \hat{x}_1^5 \\ \quad - (2\theta)((\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{x}_3^2) - (x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2)) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_3^5 - \hat{x}_2^3 \\ \quad - (2\theta^2 + \theta^3)((\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{x}_3^2) - (x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2)) \end{cases} \quad (4.70)$$

4.3.1.3 Simulation et comparaison des deux méthodes

Comparons tout d'abord l'effet de la condition initiale du système initial sur les observateurs. Le premier exemple, pour la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (-0.2, 0.25, 0.25)$ avec un gain $\theta = 1$, est exposé sur la figure 4.1.

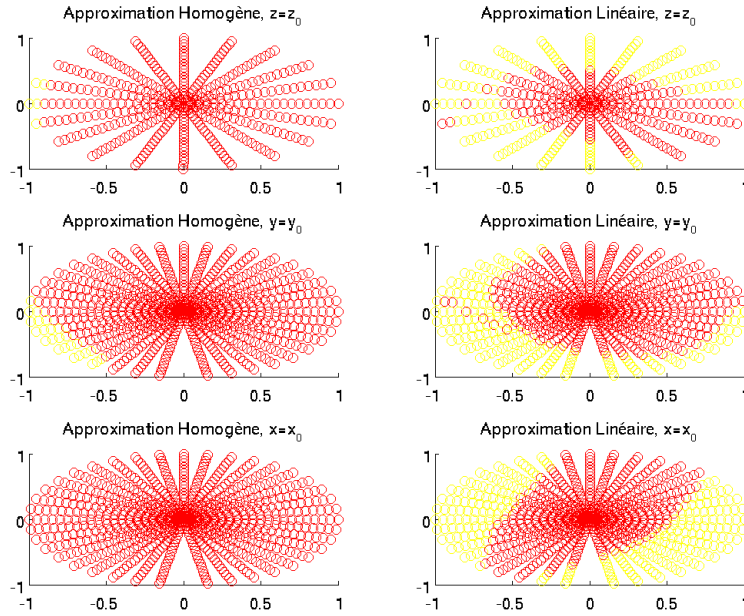


Figure 4.1 – Exemple 1, Gain $\theta = 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (-0.2, 0.25, 0.25)$

Pour le second exemple nous prenons les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (-0.6, 0.75, 0.75)$ avec un gain $\theta = 1$ et nous le montrons sur la figure 4.2.

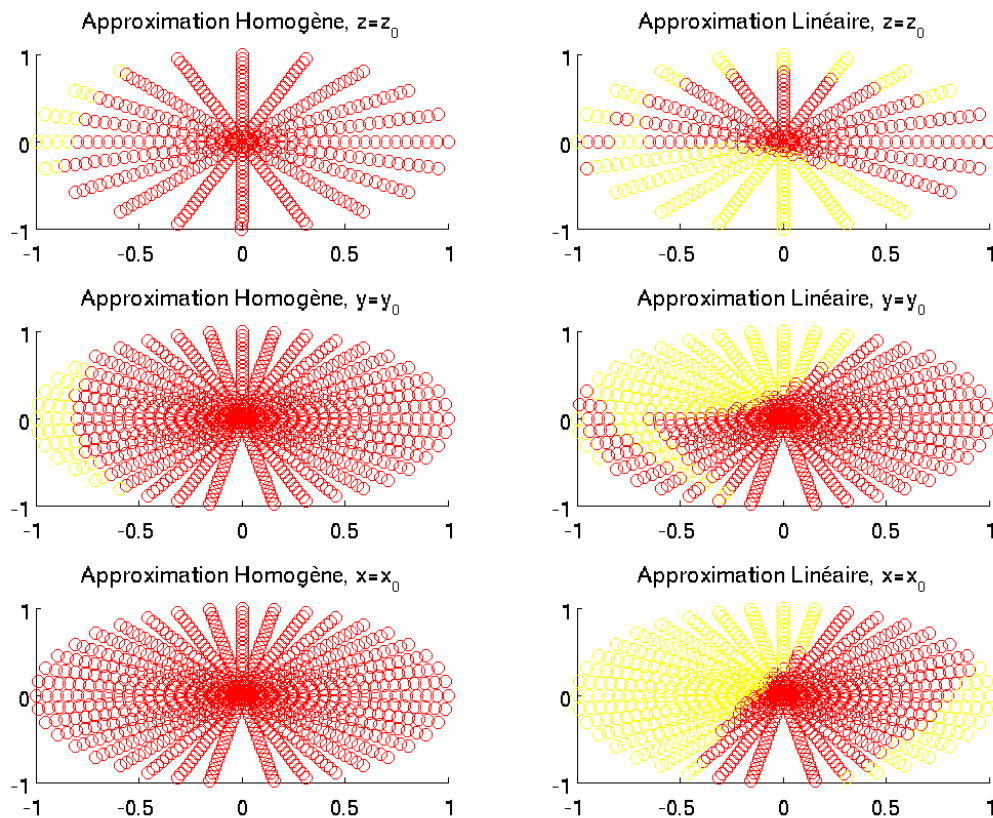


Figure 4.2 – Exemple 1, Gain $\theta = 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (-0.6, 0.75, 0.75)$

Nous constatons que le domaine de convergence de l'observateur issu de l'approximation homogène reste beaucoup plus étendu que celui issu de l'approximation linéaire directe, même pour des conditions initiales relativement éloignées de l'origine.

Regardons ensuite les effets du gain sur le domaine de convergence des observateurs. Pour cela, reprenons les mêmes conditions initiales que précédemment, mais pour un gain $k = 2$. Dans le premier cas, pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (-0.2, 0.25, 0.25)$, les résultats de la simulation sont montrés sur la figure 4.3.

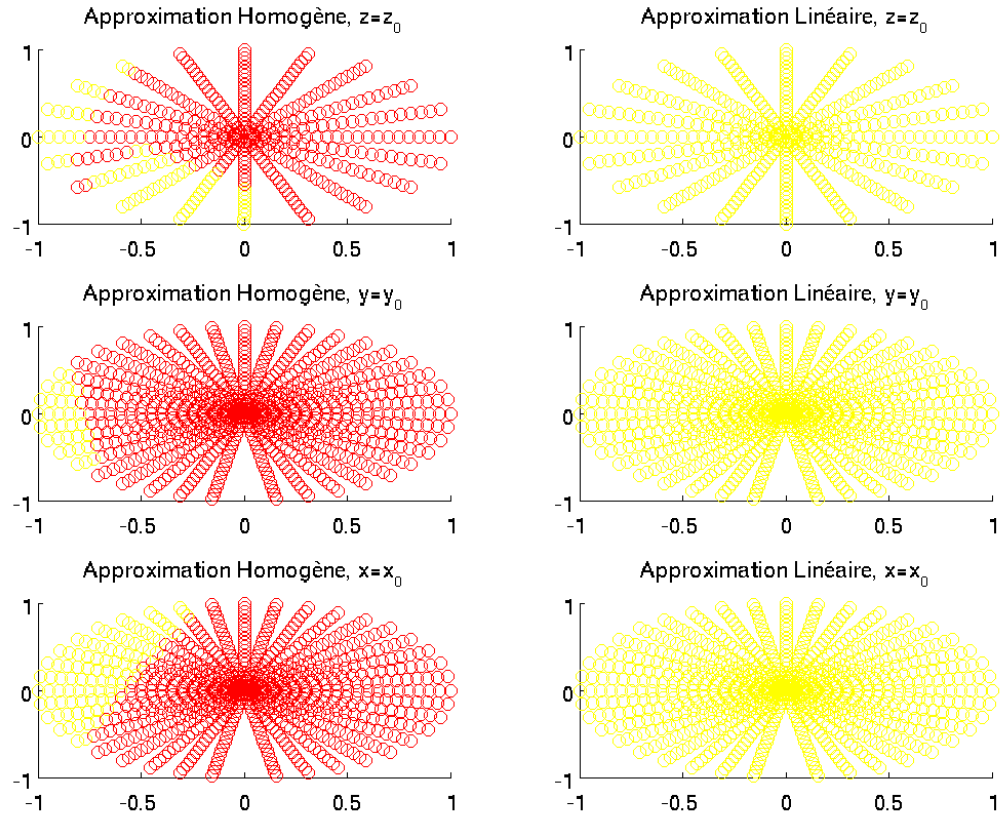


Figure 4.3 – Exemple 1, Gain $\theta = 2$, $(x_0, y_0, z_0) = (-0.2, 0.25, 0.25)$

Pour le second cas, nous considérons les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (-0.6, 0.75, 0.75)$ et exposons les résultats sur la figure 4.4.

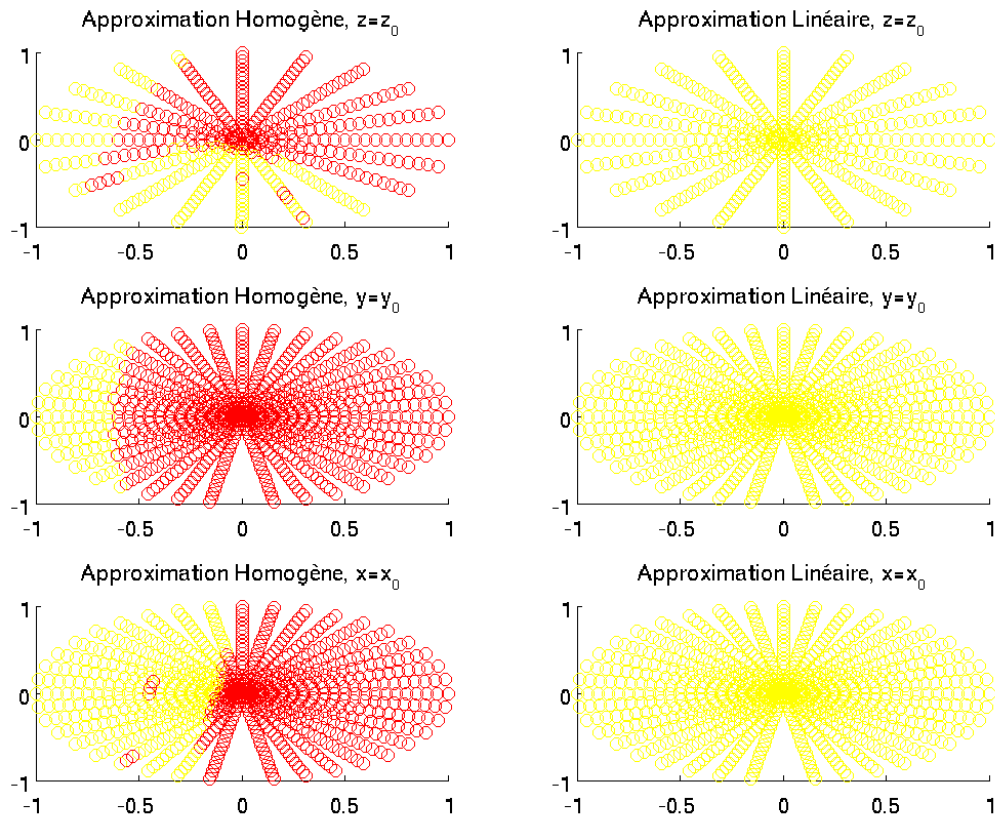


Figure 4.4 – Exemple 1, Gain $\theta = 2$, $(x_0, y_0, z_0) = (-0.6, 0.75, 0.75)$

Nous constatons que pour l'observateur issu de l'approximation homogène, le domaine de convergence reste conséquent. Par contre, pour l'observateur issu de la linéarisation directe, le domaine de convergence est tellement réduit, qu'il n'apparaît pas ici.

4.3.2 Deuxième exemple

Nous regardons maintenant le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_3^2 - x_2^3 - x_2^2 - x_1^3 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 = -x_3^5 + x_3^2 + x_3 - x_2^3 + x_2^2 - x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = -3x_3 + x_2^3 + x_2^2 - 0.5x_1^3 + x_1^2 - x_1 \\ y = h(x) = x_1 x_3 + x_3 + x_2 + x_1^2 \end{cases} \quad (4.71)$$

qui vérifie la condition du rang. En effet, on a :

$$\begin{aligned} dh(0) &= dx_2 + dx_3 \\ d\mathcal{L}_f h(0) &= -dx_1 - dx_2 + dx_3 \\ d\mathcal{L}_f^2 h(0) &= 2dx_1 + dx_2 + 5dx_3 \end{aligned}$$

4.3.2.1 Construction de l'observateur par l'approximation homogène

Afin de construire l'observateur (4.15), nous avons besoin de calculer les gains donnés par (4.14). Et donc nous allons calculer les changements de variables (4.3) et (4.7).

Calcul du premier changement de variables Premièrement, nous choisissons une base pour le drapeau :

$$\begin{aligned} d\bar{h}_1 &= dh \\ d\bar{h}_2 &= d\mathcal{L}_f h \\ d\bar{h}_3 &= d\mathcal{L}_f^2 h \end{aligned}$$

Nous pouvons alors construire une base duale de champs de vecteurs qui vérifie les conditions de l'hypothèse 3.1 :

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(x) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \bar{g}_2(x) &= -\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \bar{g}_3(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Nous obtenons un difféomorphisme par :

$$\varphi(z) = \exp(z_3 \bar{g}_3) \circ \exp(z_2 \bar{g}_2) \circ \exp(z_1 \bar{g}_1)(0) \quad (4.72)$$

d'où :

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_3 - z_2 + z_1 \\ z_2 - z_3 \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

et

$$\varphi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

Dans les nouvelles coordonnées $z = \varphi^{-1}(x)$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_3^5 - 5 z_2 z_3^4 + 10 z_2^2 z_3^3 - 0.5 z_3^3 - 10 z_2^3 z_3^2 + 5 z_3^2 + 5 z_2^4 z_3 \\ &\quad - 6 z_2 z_3 + 4 z_1 z_3 - z_2^5 + 3 z_2^2 - 4 z_1 z_2 - z_2 + 2 z_1^2 - z_1 \\ \dot{z}_2 &= -1.5 z_3^3 - z_3^2 + 2 z_2 z_3 + 2 z_3 - z_2^2 - 3 z_2 \\ \dot{z}_3 &= -2 z_3^3 + 3 z_2 z_3^2 - 3 z_1 z_3^2 - 3 z_3^2 - 3 z_2^2 z_3 + 6 z_1 z_2 z_3 \\ &\quad + 4 z_2 z_3 - 3 z_1^2 z_3 - 2 z_1 z_3 + z_3^3 - 3 z_1 z_2^2 - 2 z_2^2 \\ &\quad + 3 z_1^2 z_2 + 2 z_1 z_2 - z_1^3 - z_1^2 \\ y &= h(\varphi(z)) \stackrel{\Delta}{=} H_1(z) = z_1 + z_2 z_3 \end{cases} \quad (4.75)$$

et donc l'approximation est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_2 + 5z_3^2 \\ \dot{z}_2 = 2z_3 \\ \dot{z}_3 = 0 \\ \tilde{H}_1(z) = z_1 + z_2 z_3 \end{cases} \quad (4.76)$$

Dans la suite, nous noterons $\tilde{f}(z)$ le champ de vecteurs associé au système (4.76).

Calcul du deuxième changement de variables L'équation (4.7) est ici équivalente à :

$$\xi = \Phi_h(z) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_1(z) \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}} \tilde{H}_1(z) \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}}^2 \tilde{H}_1(z) \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

Donc :

$$\Phi_h(z) = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 z_3 \\ -z_2 + 5z_3^2 + 2z_3^2 \\ -2z_3 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

L'inverse est donné par :

$$\Phi_h^{-1}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 - \frac{1}{2}\xi_3\xi_2 + \frac{7}{8}\xi_3^3 \\ -\xi_2 + \frac{7}{4}\xi_3^2 \\ -\frac{1}{2}\xi_3 \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Construction de l'observateur Le changement de variables pour passer des coordonnées u aux coordonnées x est égal à :

$$\xi = \Phi_h \circ \varphi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_3 + x_3 + x_2 + x_1^2 \\ -x_3 + 7x_1^2 - x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

et :

$$x = \varphi \circ \Phi_h^{-1}(\xi) = \begin{pmatrix} -\frac{\xi_3}{2} \\ \frac{7\xi_3^3}{8} - \frac{7\xi_3^2}{4} - \frac{\xi_2\xi_3}{2} - \frac{\xi_3}{2} + \xi_2 + \xi_1 \\ \frac{7\xi_3^2}{4} + \frac{\xi_3}{2} - \xi_2 \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

Les gains (4.14) s'écrivent :

$$\bar{K}_h(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{\theta^3}{2} \\ 2\theta + 2\theta^2 - \frac{\theta^3}{2} + \hat{x}_1(2\theta^2 + \frac{15\theta^3}{2}) + \frac{\hat{x}_3\theta^3}{2} + 7\theta^3\hat{x}_1^2 \\ -2\theta^2 + \frac{\theta^3}{2} - 7\theta^3\hat{x}_1 \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

avec $K = [2\theta, 2\theta^2, \theta^3]^T$. L'observateur (4.15) est donc donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_2^2 - \hat{x}_3^3 - \hat{x}_2^3 \\ \quad - (-\frac{\theta^3}{2})((\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{x}_3^2) - (x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_1^2)) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - \hat{x}_2 + \hat{x}_1 - \hat{x}_3^3 - \hat{x}_1^5 \\ \quad - (2\theta + 2\theta^2 - \frac{\theta^3}{2} + \hat{x}_1(2\theta^2 + \frac{15\theta^3}{2}) + \frac{\hat{x}_3\theta^3}{2} + 7\theta^3\hat{x}_1^2) \times \\ \quad \times ((\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{x}_3^2) - (x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_1^2)) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_3^5 - \hat{x}_2^3 \\ \quad - (-2\theta^2 + \frac{\theta^3}{2} - 7\theta^3\hat{x}_1)((\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{x}_3^2) - (x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_1^2)) \end{cases} \quad (4.83)$$

4.3.2.2 Construction de l'observateur par l'approximation linéaire

Afin de construire l'observateur (4.50), nous calculons d'abord le linéarisé du système (4.71) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_1 \\ \tilde{H}_2(x) = x_2 + x_3 \end{cases} \quad (4.84)$$

Calcul du changement de variables Le changement de variables Φ_l est donné ici par :

$$\Phi_l(x) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_l(x) \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}_l}\tilde{h}_l(x) \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}_l}^2\tilde{h}_l(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

et la fonction inverse par :

$$\Phi_l^{-1}(\xi) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2\xi_2 - 2\xi_3 \\ 2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 \\ 2\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

Construction de l'observateur Nous pouvons maintenant calculer les gains (4.49), en effet :

$$\overline{K}_l = \begin{pmatrix} -4\theta^2 - 2\theta^3 \\ 4\theta - 2\theta^2 + \theta^3 \\ 2\theta + 2\theta^2 - \theta^3 \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

avec $K = [2\theta, 2\theta^2, \theta^3]$. On obtient l'observateur (4.50) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= -\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 - \hat{x}_3^2 - \hat{x}_1^3 - \hat{x}_2^3 \\ &\quad -(-4\theta^2 - 2\theta^3)((\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{x}_3^2) - (x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_1^2)) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\hat{x}_2 + \hat{x}_3 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2 - \hat{x}_2^3 - \hat{x}_3^3 \\ &\quad -(4\theta - 2\theta^2 + \theta^3)((\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{x}_3^2) - (x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_1^2)) \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 - \hat{x}_1 - 3\hat{x}_3 + \hat{x}_2^3 - \frac{1}{2}\hat{x}_1^3 \\ &\quad -(2\theta + 2\theta^2 - \theta^3)((\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{x}_3^2) - (x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_1^2)) \end{cases} \quad (4.88)$$

pour le système (4.71).

4.3.2.3 Simulation et comparaison des deux méthodes

Comme nous pouvons le constater, l'approximation homogène possède exactement la même sortie que le système original contrairement à la linéarisation. Nous allons voir les conséquences sur la performance des observateurs. Nous prenons tout d'abord comme gain, pour les deux observateurs, $\theta = 1$ et comme condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$, ce cas est exposé sur la figure 4.5. Sur la figure 4.6, nous considérons comme condition initiale pour le système original $(x_0, y_0, z_0) = (0.2, 0.2, 0.2)$.

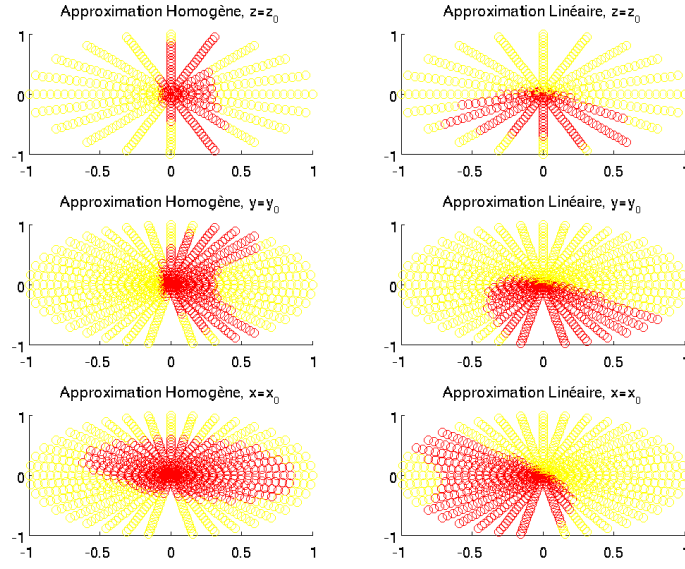


Figure 4.5 – Exemple 2, Gain $\theta = 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$

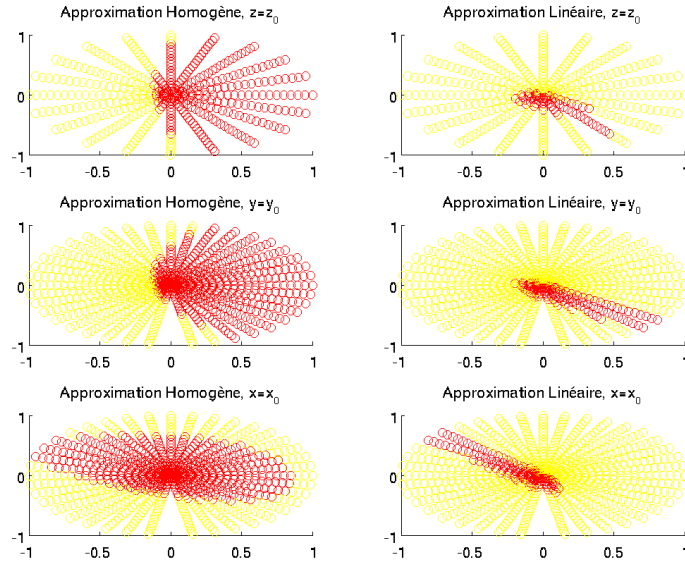


Figure 4.6 – Exemple 2, Gain $\theta = 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (0.2, 0.2, 0.2)$

Nous constatons ici, que le domaine de convergence de l'observateur issu de l'approximation homogène est beaucoup plus important que celui issu du linéarisé.

Nous nous intéressons ensuite à l'effet du gain sur la convergence de ces observateurs. Considérons donc deux nouvelles simulations avec un gain $\theta = 2$. Sur la figure 4.7, nous prenons comme condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$. Sur la figure 4.8, nous prenons comme condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (0.2, 0.2, 0.2)$.

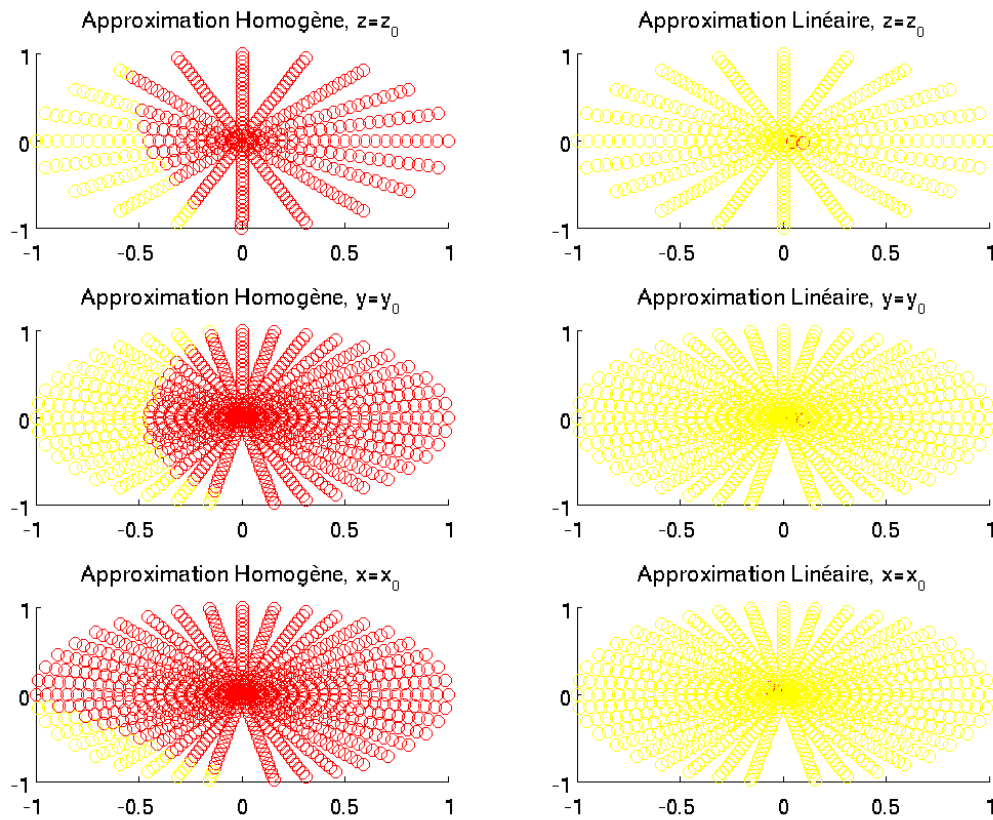


Figure 4.7 – Exemple 2, Gain $\theta = 2$, $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$

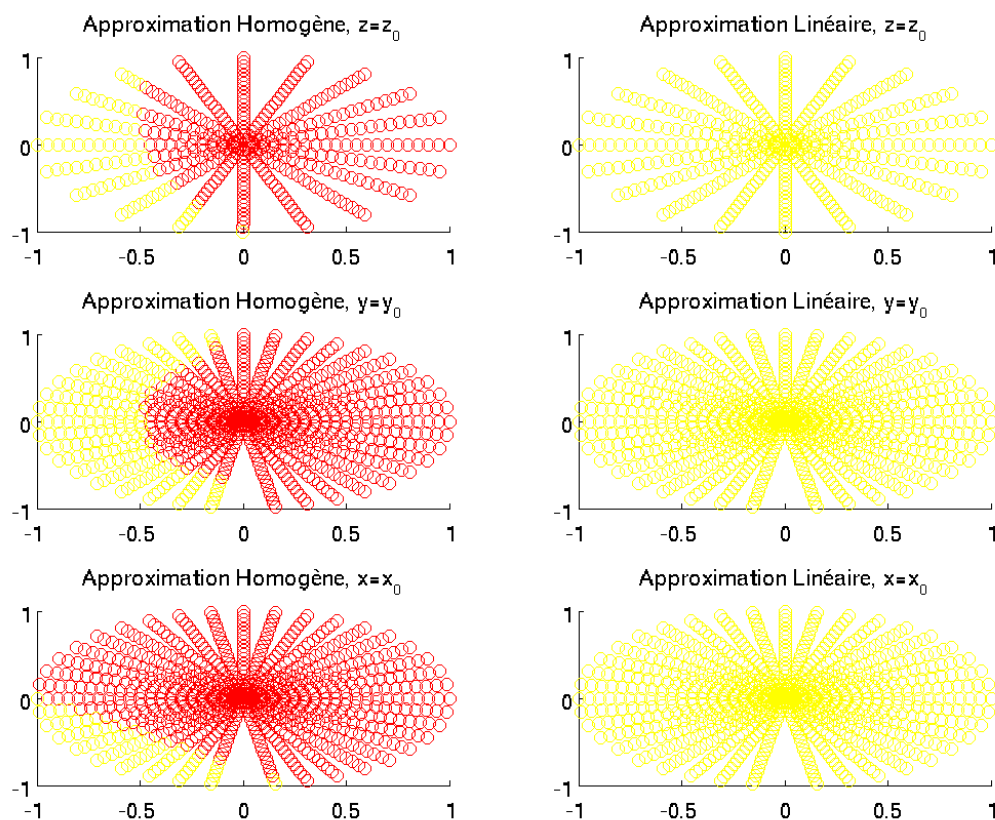


Figure 4.8 – Exemple 2, Gain $\theta = 2$, $(x_0, y_0, z_0) = (0.2, 0.2, 0.2)$

L'observateur issu du linéarisé semble très sensible au réglage du gain. En effet, pour toutes les conditions initiales considérées, cet observateur n'est pas convergent. Au contraire, l'observateur issu de l'approximation homogène reste convergent sur un voisinage de la condition initiale plus important que dans le cas $\theta = 1$. Cette conclusion est cohérente, car l'approximation homogène considère toute la sortie contrairement à l'approximation linéaire.

4.3.3 Troisième exemple

Nous nous intéressons au système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_3^2 + x_2 - x_1^5 + x_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_2^5 + x_2^2 \\ \dot{x}_3 = -x_3^5 + x_3^3 + x_2^3 - x_1^5 \\ y = h(x) = x_3^3 + x_3 + x_2^3 + x_1 \end{cases} \quad (4.89)$$

avec un paramètre $a \in \mathbb{R}$. Le système (4.89) vérifie la condition du rang. En effet :

$$\begin{aligned} dh(0) &= dx_1 + dx_3 \\ d\mathcal{L}_f h(0) &= dx_1 + dx_2 \\ d\mathcal{L}_f^2 h(0) &= dx_1 + dx_2 + dx_3 \end{aligned}$$

4.3.3.1 Construction de l'observateur par l'approximation homogène

Afin de construire l'observateur (4.15), nous avons besoin de calculer les gains issus de (4.14). Nous avons besoin des deux changements de variables (4.3) et (4.7).

Calcul du premier changement de variables Pour construire le premier changement de variables, nous devons d'abord choisir une base pour le drapeau d'observabilité :

$$\begin{aligned} d\bar{h}_1 &= dh \\ d\bar{h}_2 &= d\mathcal{L}_f h \\ d\bar{h}_3 &= d\mathcal{L}_f^2 h \end{aligned}$$

Nous pouvons alors construire une base duale de champs de vecteurs qui vérifie les conditions de l'hypothèse 3.1 :

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \bar{g}_2(x) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \bar{g}_3(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Nous obtenons un difféomorphisme par :

$$\varphi(z) = \exp(z_3 \bar{g}_3) \circ \exp(z_2 \bar{g}_2) \circ \exp(z_1 \bar{g}_1)(0) \quad (4.90)$$

Ce qui donne :

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} z_3 + z_1 \\ z_2 - z_3 \\ -z_3 \end{pmatrix} \quad (4.91)$$

et

$$\varphi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_3 + x_1 \\ x_2 - x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

Dans les nouvelles coordonnées $z = \varphi^{-1}(x)$, on a donc :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= a z_3^2 - z_3^5 - 5 z_1 z_3^4 - 10 z_1^2 z_3^3 - 10 z_1^3 z_3^2 - 5 z_1^4 z_3 + z_2 - z_1^5 + z_1 \\ \dot{z}_2 &= z_3^5 - 5 z_2 z_3^4 + 10 z_2^2 z_3^3 - 10 z_2^3 z_3^2 + z_3^2 + 5 z_2^4 z_3 - 2 z_2 z_3 - z_3 - z_2^5 + z_2^2 \\ \dot{z}_3 &= -5 z_1 z_3^4 - 10 z_1^2 z_3^3 - 2 z_3^3 + 3 z_2 z_3^2 - 10 z_1^3 z_3^2 - 3 z_2^2 z_3 - 5 z_1^4 z_3 + z_2^3 - z_1^5 \\ y &= h(\varphi(z)) \triangleq H_1(z) = -2 z_3^3 + 3 z_2 z_3^2 - 3 z_2^2 z_3 + z_3^3 + z_1 \end{cases} \quad (4.93)$$

Ainsi, nous avons l'approximation :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3^2 a + z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_3 \\ \dot{z}_3 = 0 \\ \tilde{H}_1(z) = z_1 - 2 z_3^3 \end{cases} \quad (4.94)$$

Dans la suite, nous noterons $\tilde{f}(z)$ le champ de vecteurs associé au système (4.94).

Calcul du deuxième changement de variables Avec l'approximation (4.94), nous pouvons maintenant construire le deuxième changement de variables (4.7). En effet, Φ_h est égal à :

$$\xi = \Phi_h(z) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_1(z) \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}} \tilde{H}_1(z) \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}}^2 \tilde{H}_1(z) \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

D'où :

$$\Phi_h(z) = \begin{pmatrix} z_1 - 2 z_3^3 \\ a z_3^2 + z_2 \\ -z_3 \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

et

$$\Phi_h^{-1}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 - 2 \xi_3^3 \\ \xi_2 - a \xi_3^2 \\ -\xi_3 \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

Construction de l'observateur En utilisant les deux fonctions (4.90) et (4.95), les gains (4.14) sont donnés par :

$$\bar{K}_h = \begin{pmatrix} 2\theta - 6\theta^3 \hat{x}_3^2 \\ 2\theta^3 \hat{x}_3 a + 2\theta^2 \\ -\theta^3 \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

avec $K = [2\theta, 2\theta^2, \theta^3]$. L'observateur (4.15), ainsi obtenu est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_3^2 a + \hat{x}_2 - \hat{x}_1^5 + \hat{x}_1 \\ &\quad - (2\theta - 6\theta^3 \hat{x}_3^2)((\hat{x}_3^3 + \hat{x}_3 + \hat{x}_2^3 + \hat{x}_1) - (x_3^3 + x_3 + x_2^3 + x_1)) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 - \hat{x}_2^5 + \hat{x}_2^2 \\ &\quad - (\theta^3 \hat{x}_3 a + 2\theta^2)((\hat{x}_3^3 + \hat{x}_3 + \hat{x}_2^3 + \hat{x}_1) - (x_3^3 + x_3 + x_2^3 + x_1)) \\ \dot{\hat{x}}_3 &= -\hat{x}_3^5 + \hat{x}_3^3 + \hat{x}_2^3 - \hat{x}_1^5 \\ &\quad - (-\theta^3)((\hat{x}_3^3 + \hat{x}_3 + \hat{x}_2^3 + \hat{x}_1) - (x_3^3 + x_3 + x_2^3 + x_1)) \end{cases} \quad (4.99)$$

4.3.3.2 Construction de l'observateur par l'approximation linéaire

Dans cette section, nous calculons explicitement l'observateur (4.50) pour le système (4.89). Le linéarisé du système (4.89) est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ \tilde{h}(x) = x_1 + x_3 \end{cases} \quad (4.100)$$

Calcul du changement de variables Afin de construire l'observateur, nous avons besoin du changement de variables (4.43). Pour le système (4.100), la fonction Φ_l et son inverse Φ_l^{-1} s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Phi_l(x) &= \begin{pmatrix} x_3 + x_1 \\ x_2 + x_1 \\ x_3 + x_2 + x_1 \end{pmatrix} \\ \Phi_l^{-1}(\xi) &= \begin{pmatrix} -\xi_3 + \xi_2 + \xi_1 \\ \xi_3 - \xi_1 \\ \xi_3 - \xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.101)$$

Construction de l'observateur Nous obtenons :

$$\bar{K}_l = \begin{pmatrix} 2\theta + 2\theta^2 - \theta^3 \\ -2\theta + \theta^3 \\ -2\theta^2 + \theta^3 \end{pmatrix} \quad (4.102)$$

comme gains (4.49) pour l'observateur, avec $K = [2\theta, 2\theta^2, \theta^3]$. Nous avons donc :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_3^2 a + \hat{x}_2 - \hat{x}_1^5 + \hat{x}_1 \\ &\quad - (2\theta + 2\theta^2 - \theta^3)((\hat{x}_3^3 + \hat{x}_3 + \hat{x}_2^3 + \hat{x}_1) - (x_3^3 + x_3 + x_2^3 + x_1)) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 - \hat{x}_2^5 + \hat{x}_2^2 \\ &\quad - (-2\theta + \theta^3)((\hat{x}_3^3 + \hat{x}_3 + \hat{x}_2^3 + \hat{x}_1) - (x_3^3 + x_3 + x_2^3 + x_1)) \\ \dot{\hat{x}}_3 &= -\hat{x}_3^5 + \hat{x}_3^3 + \hat{x}_2^3 - \hat{x}_1^5 \\ &\quad - (-2\theta^2 + \theta^3)((\hat{x}_3^3 + \hat{x}_3 + \hat{x}_2^3 + \hat{x}_1) - (x_3^3 + x_3 + x_2^3 + x_1)) \end{cases} \quad (4.103)$$

comme observateur (4.50) pour le système (4.89).

4.3.3.3 Simulation et comparaison des deux méthodes

Comparons à nouveau les deux observateurs par des simulations, de manière similaire aux deux précédents exemples. Cependant, pour cet exemple, nous avons introduit un paramètre $a \in \mathbb{R}$ dans l'équation du système original. Nous allons donc nous focaliser sur l'effet de ce paramètre sur le domaine de convergence des deux observateurs. Nous prenons comme gain $\theta = 0.5$ pour toutes les simulations que nous ferons ensuite. Dans un premier temps, prenons une condition initiale proche de l'origine, $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$. Nous allons prendre différentes valeurs pour le paramètre a . Sur la figure 4.9, nous présentons les résultats pour $a = -5$. Sur la figure 4.10, nous présentons les résultats pour $a = 1$. Enfin, les simulations pour les observateurs avec le paramètre $a = 5$ sont présentées sur la figure 4.11

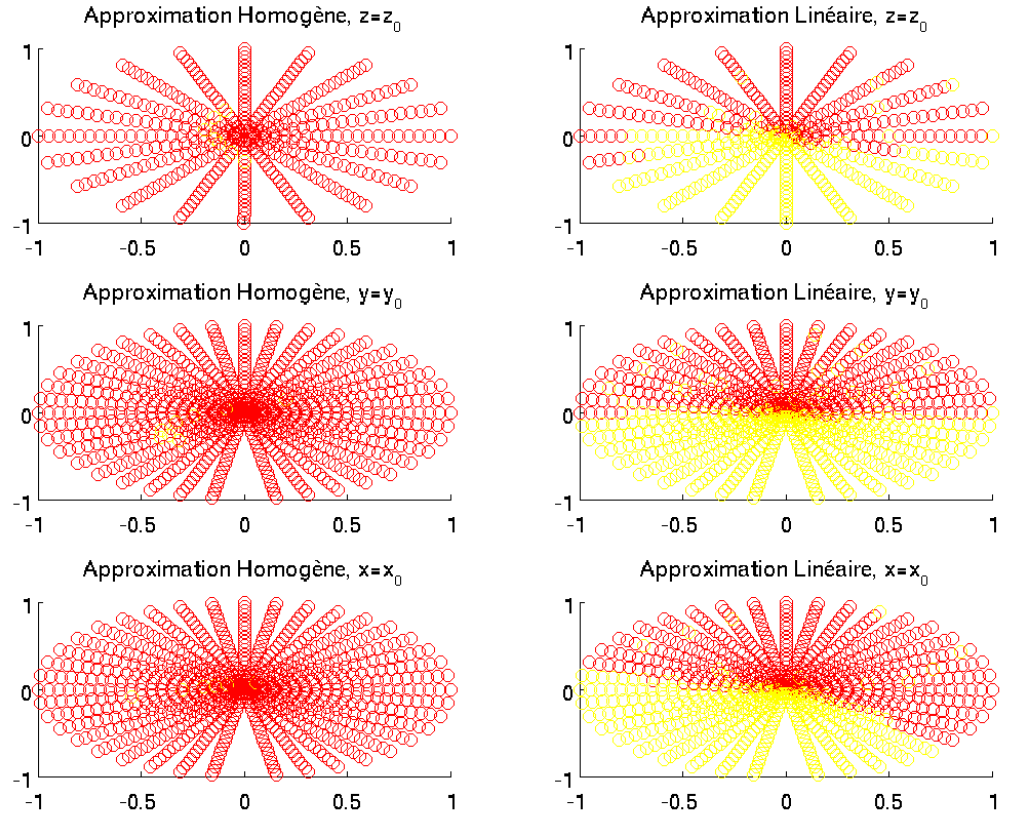


Figure 4.9 – Exemple 3, Gain $\theta = 0.5$, Paramètre $a = -5$, $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$

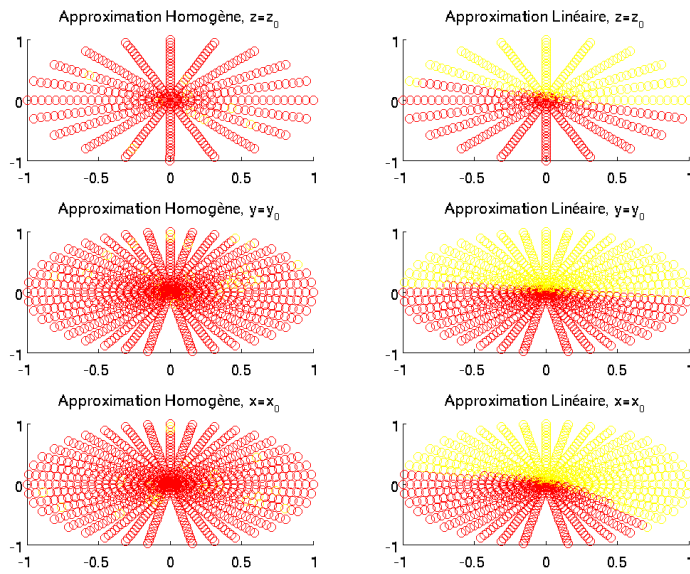


Figure 4.10 – Exemple 3, Gain $\theta = 0.5$, Paramètre $a = 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$

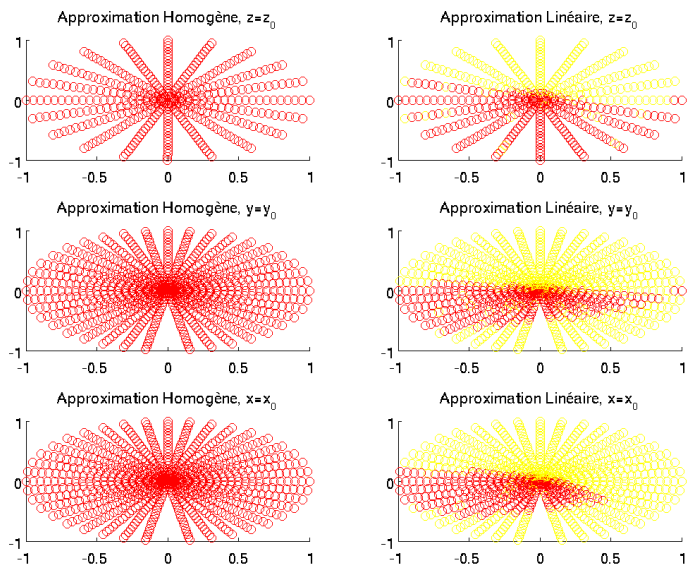


Figure 4.11 – Exemple 3, Gain $\theta = 0.5$, Paramètre $a = 5$, $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$

Nous constatons que l'observateur issu de l'approximation homogène semble moins sensible aux variations du paramètre a .

Nous nous intéressons ensuite à une condition initiale pour le système original plus éloignée de l'origine. En effet nous considérons maintenant $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 0.5, 0.5)$. Nous reprenons les mêmes paramètres que précédemment, sur la figure 4.12, nous présentons les résultats de simulations pour le paramètre $a = -5$. Sur la figure 4.13, nous prenons le paramètre $a = 1$. Enfin sur la figure 4.14, les résultats de simulations sont donnés pour $a = 5$.

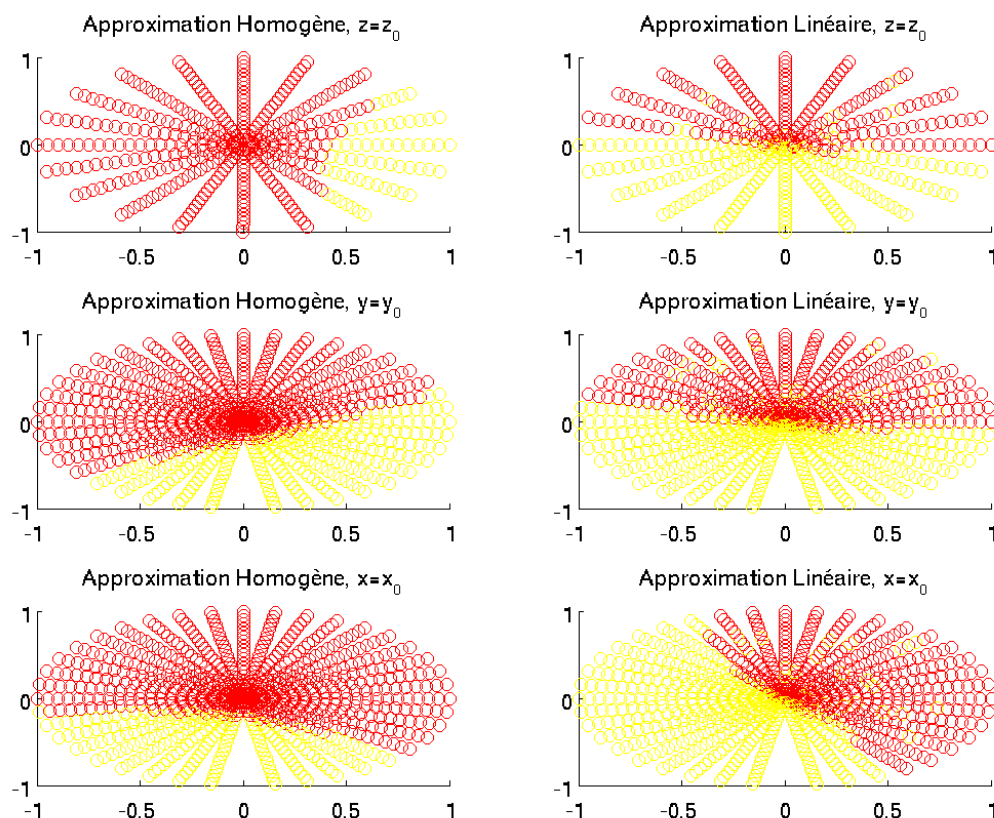


Figure 4.12 – Exemple 3, Gain $\theta = 0.5$, Paramètre $a = -5$, $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 0.5, 0.5)$

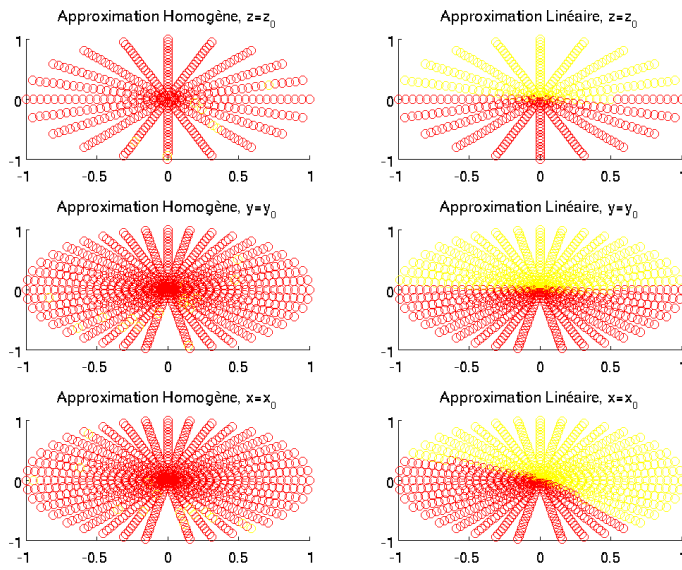


Figure 4.13 – Exemple 3, Gain $\theta = 0.5$, Paramètre $a = 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 0.5, 0.5)$

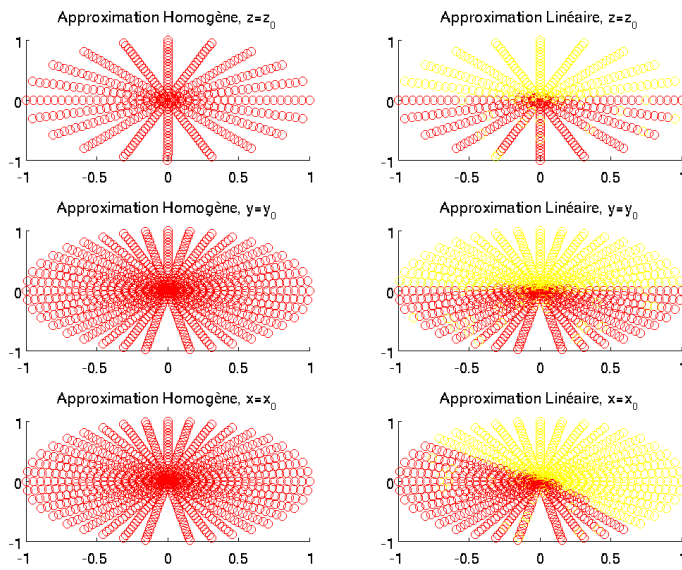


Figure 4.14 – Exemple 3, Gain $\theta = 0.5$, Paramètre $a = 5$, $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 0.5, 0.5)$

De même que pour la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$, l'observateur issu de l'approximation homogène est moins sensible aux changements sur le paramètre a .

4.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la construction d'un nouvel observateur s'appuyant sur l'approximation construite dans le chapitre précédent. Une fois la fonction donnant le changement de variable obtenue, la construction de l'observateur est directe et simple. De plus, les gains sont issus d'un système linéaire, et plus particulièrement d'une forme normale d'observabilité, ils sont donc très faciles à calculer. Afin de montrer l'efficacité de cette approche, nous avons comparé l'observateur issu de l'approximation homogène avec un observateur issu d'une linéarisation. Nous avons exhibé plusieurs exemples afin de comparer plus efficacement les deux approches. Nous avons pu constater que l'observateur issu de l'approximation homogène possède un domaine de convergence plus étendu et est moins sensible à la variation du gain.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Pendant cette thèse, nous avons appliqué l'outil d'homogénéité pour la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires. Nous avons exploré deux champs d'applications : d'abord nous avons étudié le problème de la synthèse d'observateurs en temps fini, pour nous concentrer ensuite sur la construction d'une approximation pour le problème de l'observabilité.

La première contribution de notre travail de recherche est présentée au *chapitre 2*. Comme nous l'avons soulignée, la synthèse d'observateurs en temps fini a déjà fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Nous nous sommes intéressés aux observateurs en temps fini dont les gains sont réglés par une équation de Riccati, comme dans le cas linéaire. Cette approche permet d'obtenir des observateurs en temps fini très simples à mettre en place. Nous nous sommes appuyés en particulier sur un travail précis. En effet un observateur semi-global pour la classe des systèmes uniformément observables, globalement Lipschitz et à entrée bornée avait déjà été construit dans [Shen et Xia \(2008\)](#). Nous avons donc étendu ce résultat en synthétisant un observateur global en temps fini pour la même classe de systèmes. Cette contribution a fait l'objet d'une communication en conférence dans [Ménard *et al.* \(2009\)](#), ainsi que d'un article en revue dans [Ménard *et al.* \(2010\)](#).

La deuxième contribution de cette thèse a été la construction d'une approximation homogène pour le problème de l'observabilité. Ce problème a déjà été étudié pour la commandabilité, en particulier pour des systèmes fortement accessibles, dans [Hermes \(1991\)](#); [Bianchini et Stefani \(1990\)](#). Il a été montré que pour un système fortement accessible, c'est-à-dire dont l'espace de commandabilité est de même rang que la dimension du système, il est toujours possible de construire une approximation homogène spécialement adaptée à ce problème. Dans le *chapitre 3*, nous avons proposé une construction duale pour le problème de l'observabilité, c'est-à-dire pour un système dont le rang de l'espace d'observabilité est égal à la dimension de l'espace d'état. Cette construction fournit une approximation homogène spécialement adaptée au problème de l'observabilité. En par-

ticulier, nous avons montré que le système approximant et le système original possèdent le même espace d'observabilité au point considéré. La construction que nous donnons peut ne pas être facilement applicable dans le cas général, mais nous avons donné des solutions alternatives, ce qui peut faciliter les calculs. Nous avons illustré cette méthode sur plusieurs systèmes académiques, et nous avons montré qu'elle laisse un grand degré de liberté. Cette construction a été publiée dans [Ménard *et al.* \(2011\)](#).

Le dernier chapitre, 4, est une application du chapitre 3. Nous construisons un observateur local en utilisant l'approximation homogène que nous avons construite précédemment. Il existe cependant d'autres constructions d'observateurs locaux pour des systèmes remplissant la condition du rang. En effet, il suffit de construire un observateur linéaire en considérant la partie linéaire du système considéré. Il a été montré que cet observateur, issu de l'approximation linéaire, est localement convergent si le système considéré est stable au sens de Lyapunov. Nous montrons que notre observateur, issu de l'approximation homogène, est également localement convergent pour des systèmes stables au sens de Lyapunov. Bien que ces deux approches mènent à des observateurs localement convergents, nous montrons à l'aide de plusieurs exemples que l'observateur issu de l'approximation homogène montre de meilleures performances. En effet, pour des observateurs locaux, il y a principalement deux problèmes qui se posent : l'étendue du domaine de convergence ainsi que le réglage des gains. Nous avons constaté, sur les exemples traités que le domaine de convergence (au sens défini dans cette thèse) est plus étendu et que la sensibilité par rapport au réglage des gains est moindre pour l'observateur issu de l'approximation homogène.

Le travail effectué dans cette thèse ouvre la voie à plusieurs développements, à la fois pour la synthèse d'observateurs en temps fini et faisant suite à la synthèse d'observateurs locaux utilisant une approximation homogène.

Pour la synthèse d'observateurs en temps fini, nous pensons qu'il est possible d'étendre la construction proposée dans ce mémoire à des classes de systèmes plus importantes. En effet, il devrait être possible de construire un observateur pour les systèmes dont les non linéarités sont seulement Hölder, et non Lipschitz.

L'approximation homogène pour le problème de l'observabilité proposée ici n'est qu'un premier pas dans cette direction. En effet, les systèmes considérés ici sont des systèmes sans entrée de commande. Bien que la synthèse d'observateur pour des systèmes sans contrôle mène à de nombreuses utilisations, comme la surveillance, la détection de défaillance ou encore la synchronisation, le problème de la commande et en particulier de la commande par retour de sortie reste prépondérant en théorie du contrôle. Nous pensons que l'approximation homogène construite ici, pour le problème de l'observabilité, combinée avec l'approximation homogène déjà existante pour le problème de la commandabilité pourrait être utile pour la synthèse d'une commande par retour de sortie locale.

ANNEXE A

RAPPELS SUR LA STABILITÉ

Nous rappelons ici la définition de la stabilité au sens de Lyapunov, ainsi que les résultats correspondants sur les fonctions de Lyapunov. Nous considérons un système autonome de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.1})$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs C^1 tel que $f(0) = 0$.

Définition A.1. *Khalil (2000) Le point d'équilibre $x = 0$ du système (A.1) est dit*

- *stable, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que :*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

- *instable si le système n'est pas stable,*
- *asymptotiquement stable si le système est stable et si δ peut être choisi tel que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Exemple A.1.

Le système

$$\dot{x} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.4})$$

est stable au point d'équilibre $x = 0$, mais pas asymptotiquement stable. En effet les solutions sont données par $x(t) = x(0)$, pour tout $t \geq 0$. On peut donc prendre $\delta = \varepsilon$ pour vérifier la définition de la stabilité. Mais les solutions ne convergent pas vers l'origine quand t tend vers $+\infty$, donc le système n'est pas asymptotiquement stable.

Le système

$$\dot{x} = -x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.5})$$

est asymptotiquement stable à l'origine. En effet, les solutions sont données par $x(t) = x(0) \exp(-t)$. Pour vérifier la stabilité, on peut prendre également $\delta = \varepsilon$. Alors les solutions convergent vers l'origine quand t tend vers $+\infty$.

Le système

$$\dot{x} = x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.6})$$

est instable en zéro, car les solutions issues de $x_0 \neq 0$ tendent vers l'infini quand t tend vers l'infini. \diamond

On voit que pour pouvoir vérifier qu'un point d'équilibre d'une équation différentielle est stable à partir de la définition, on doit connaître explicitement les solutions. En pratique, il n'est presque jamais possible de calculer les solutions d'une équation différentielle. C'est pourquoi une méthodologie a été mise au point pour vérifier qu'un point d'équilibre d'un système est stable : ce sont les fonctions de Lyapunov.

Nous rappelons donc d'abord deux résultats qui montrent que l'existence d'une fonction de Lyapunov est suffisante pour assurer que l'origine d'un système est stable ou asymptotiquement stable.

Théorème A.1. *Khalil (2000)* Supposons que $x = 0$ est un point d'équilibre du système (A.1) et soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant $x = 0$. Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que :

$$V(0) = 0 \text{ et } V(x) > 0 \text{ dans } D \setminus \{0\} \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ dans } D \quad (\text{A.8})$$

Alors $x = 0$ est stable.

De plus, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ dans } D \setminus \{0\} \quad (\text{A.9})$$

alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.

Une fonction V qui vérifie (A.7) et (A.8) est appelée une fonction de Lyapunov pour le système (A.1). Pour le cas de la stabilité globale, on a besoin d'une hypothèse supplémentaire sur la fonction V .

Théorème A.2. *Khalil (2000)* Supposons que $x = 0$ soit un point d'équilibre pour le système (A.1). Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que :

$$V(0) = 0 \text{ et } V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{A.12})$$

alors $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Remarque A.1. Si une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la propriété (A.11), alors on dit qu'elle est radialement non bornée.

Les deux théorèmes précédents montrent que si l'on arrive à trouver une fonction de Lyapunov dont la dérivée le long des solutions de l'équation (A.1) est négative (resp. strictement négative), alors l'équilibre du système (A.1) est stable (resp. asymptotiquement stable). Le résultat suivant nous assure que si l'origine du système (A.1) est stable, et si le champ de vecteurs f est localement Lipschitz, alors une telle fonction de Lyapunov existe.

Théorème A.3. *Khalil (2000)* Supposons que $x = 0$ est un point d'équilibre du système (A.1) et que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit localement Lipschitz, avec $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine qui contient l'origine. Soit $R_A \subset D$ la région d'attraction de $x = 0$. Alors, il existe une fonction lisse, définie positive $V(x)$ et une fonction continue, définie positive $W(x)$ qui sont définies pour tout $x \in R_A$, telles que

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ quand } x \rightarrow \partial R_A \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq -W(x), \quad \forall x \in R_A \quad (\text{A.14})$$

et pour tout $c > 0$, $\{V(x) \leq c\}$ est un compact de R_A . Quand $R_A = \mathbb{R}^n$, $V(x)$ est radialement non borné.

D'après ce résultat, si le champ de vecteurs est au moins Lipschitz, on peut toujours trouver une fonction de Lyapunov. Malheureusement, ce résultat n'est pas constructif, et il n'existe pas d'algorithme pour construire une fonction de Lyapunov dans le cas général. Cependant, pour certaines classes de systèmes, il est possible de construire explicitement une fonction de Lyapunov, par exemple pour les systèmes linéaires.

Exemple A.2. Considérons le système :

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.15})$$

où A est une matrice de dimension $n \times n$. Le système (A.15) est globalement asymptotiquement stable si et seulement s'il existe des matrices P et Q symétriques définies positives de dimension $n \times n$ telles que

$$A^T P + P A + Q = 0 \quad (\text{A.16})$$

La fonction quadratique $V(x) = x^T P x$ est une fonction de Lyapunov pour le système (A.15). \diamond

ANNEXE B

RAPPELS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

B.1 Définitions

Définition B.1. *Spivak (2005)*

- Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, on note dh la 1-forme associée à h , définie par :

$$dh(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \quad (\text{B.1})$$

- Soit F est un sous ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, alors on note $dF = \{dh, h \in F\}$ le sous ensemble de $\Omega^1(\mathbb{R}^n)$ correspondant et $dF(x) = \{dh(x) : h \in F\}$.
- $(t, \xi) \mapsto \exp(tf)\xi$ est la solution de

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = \xi \quad (\text{B.2})$$

où $f \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$.

- Soit f et g deux champs de vecteurs de $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$, alors nous noterons $[f, g]$ le crochet de Lie des champs de vecteurs f et g . Le crochet de Lie $[f, g]$ est un élément de $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ tel que sa i -ème coordonnée soit définie par :

$$([f, g])_i(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) - g_j(x) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \quad (\text{B.3})$$

De plus nous noterons :

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &= g \\ ad_f^1 g &= [f, g] \\ ad_f^k g &= [f, ad_f^{k-1} g], \quad k \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

- Soit $f \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, la dérivée de Lie $\mathcal{L}_f h$ de la fonction h le long du champ de vecteurs f est définie par :

$$\mathcal{L}_f h(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \quad (\text{B.5})$$

En effet, tout champ de vecteurs de $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ peut être considéré comme un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des opérateurs différentiels sur les fonctions à valeurs réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

B.2 Formules

Nous rappelons ici la formule qui décrit comment un champ de vecteurs peut être tiré en arrière le long du flot induit par un difféomorphisme. Soit f un champ de vecteurs, pour un temps t , avec $|t|$ assez petit, l'application $x \rightarrow \exp(tf)(x)$ est un difféomorphisme qui induit un isomorphisme sur l'espace tangent, que l'on note :

$$\exp(tf)_* : TM_x \rightarrow TM_{\exp(tf)(x)} \quad (\text{B.6})$$

Théorème B.1. *Hermes (1991)* Soient f, g des champs de vecteurs analytiques sur la variété M de dimension n , réelle et analytique. Alors, pour $|t| > 0$ assez petit,

$$\frac{d}{ds}(\exp(tf) \circ \exp(sg) \circ \exp(-tf))(x)|_{s=0} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} (ad^\nu f, g)(x) \quad (\text{B.7})$$

ou

$$\exp(tf)_* g(\exp(-tf)(x)) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} (ad^\nu f, g)(x) \quad (\text{B.8})$$

Afin de raccourcir les notations, notons $\phi(t, x) = \exp(tf)(x)$ et $\psi(t, x) = \exp(tg)(x)$, alors (B.7) et (B.8) peuvent être réécrits sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \phi(t, \psi(s, \phi(-t, x)))|_{s=0} &= \phi_*(t, \phi(-t, x)) g(\phi(-t, x)) \\ &= \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(\frac{t^\nu}{\nu!} \right) (ad^\nu f, g)(x) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

où $\phi_*(t, x)$ est l'isomorphisme induit par le difféomorphisme $x \rightarrow \phi(t, x)$, sur l'espace tangent.

Lemme B.1. *Hermes (1991)*

- (a) $\phi_*(t, \phi(-t, x)) = (\phi_*(-t, x))^{-1}$
 (b) $\frac{d}{dt} \phi_*(t, \phi(-t, x)) = \phi_*(t, \phi(-t, x)) f_x(\phi(-t, x))$

Démonstration du lemme B.1. En dérivant l'égalité $\phi(t, \phi(-t, x)) = x$ par rapport à x , on montre que $\phi_*(t, \phi(-t, x))\phi_*(-t, x) = id$, ce qui donne (a). Pour (b), par définition $\dot{\phi}(t, x) = f(\phi(t, x))$; donc, en renversant le temps, on obtient $\dot{\phi}(-t, x) = -f(\phi(-t, x))$. C'est une égalité dépendante de x , donc en dérivant de chaque côté par rapport à x , on obtient :

$$\dot{\phi}_*(-t, x) = -f_x(\phi(-t, x))\phi_*(-t, x) \quad (\text{B.10})$$

Cette égalité montre que la solution fondamentale du problème variationnel $\dot{y} = f_x(\varphi(t, x))y$ est $\phi_*(t, x) = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$ dans les coordonnées locales. Mais si $\phi_*(-t, x)$ satisfait (B.10), son inverse $(\phi_*(-t, x))^{-1}$ satisfait :

$$\frac{d}{dt}(\phi_*(-t, x))^{-1} = (\phi_*(-t, x))^{-1}f_x(\phi(-t, x)) \quad (\text{B.11})$$

En conclusion, (b) est obtenu en utilisant (a) dans (B.11). \square

Démonstration du théorème B.1. En utilisant (a) et (b) dans le Lemme B.1 dans (B.9), on peut reformuler ce que l'on doit prouver comme :

$$\begin{aligned} \phi_*(t, \phi(-t, x))g(\phi(-t, x)) &= (\phi_*(-t, x))^{-1}g(\phi(-t, x)) \\ &= \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(\frac{t^\nu}{\nu!}\right) (ad^\nu f, g)(x) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Définissons

$$\chi(t, g) = \phi_*(t, \phi(-t, x))g(\phi(-t, x)) \quad (\text{B.13})$$

Calculons le développement en série de Taylor de la fonction $\chi(t, g)$ par rapport à t en $t = 0$.

$$\begin{aligned} \chi'(t, g) &= \left(\frac{d}{dt}\phi_*(t, \phi(-t, x))\right)g(\phi(-t, x)) - \phi_*(t, \phi(-t, x))g_x(\phi(-t, x))f(\phi(-t, x)) \\ &= \phi_*(t, \phi(-t, x))\{f_x(\phi(-t, x))g(\phi(-t, x)) - g_x(\phi(-t, x))f(\phi(-t, x))\} \\ &= \phi_*(t, \phi(-t, x))[f, g](\phi(-t, x)) \\ &= \chi(t, [f, g]) \end{aligned}$$

Comme $\phi_*(0, \phi(0, x)) = id$, $\chi(0, g) = g(x)$, $\chi'(0, g) = [f, g](x)$, et de manière récursive, $\chi^{(n)}(0, g) = (ad^n f, g)(x)$. Ainsi $\chi(t, g) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} (ad^\nu f, g)(x)$. Ce qui termine la démonstration. \square

ANNEXE C

RAPPELS SUR L'HOMOGENÉITÉ

La notion d'homogénéité par rapport à des poids est un outil qui a beaucoup été utilisé dans la théorie du contrôle, par exemple pour la construction d'approximations. En effet, la notion d'homogénéité généralise la notion de degré des polynômes, et donc permet des développements de fonction plus généraux que le développement de Taylor.

Définition C.1. *L'application*

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon^r : \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \delta_\epsilon^r x = (\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

est appelée dilatation par rapport aux poids $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n$, où $\epsilon > 0$. Si $r_1 = \dots = r_n = 1$, on appelle δ_ϵ^r la dilatation standard.

Définition C.2. *Une fonction $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ est dite homogène de degré d par rapport à la dilatation δ_ϵ^r si*

$$h(\delta_\epsilon^r x) = \epsilon^d h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{C.2})$$

pour tout $\epsilon > 0$. De manière équivalente, on dit que h est homogène de degré d par rapport aux poids (r_1, \dots, r_n) .

Exemple C.1. La fonction $h(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + x_1^2$ est homogène de degré 4 par rapport aux poids $(r_1, r_2) = (2, 1)$. \diamond

Définition C.3. *Un champ de vecteurs $f \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ est dit homogène de degré d par rapport à la dilatation δ_ϵ^r si*

$$f(\delta_\epsilon^r x) = \epsilon^d \delta_\epsilon^r f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{C.3})$$

pour tout $\epsilon > 0$.

Exemple C.2. Le champ de vecteurs $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2^3) \frac{\partial}{\partial x_2}$ est homogène de degré 2 par rapport aux poids $(r_1, r_2) = (2, 1)$. \diamond

Le lemme suivant montre que la dérivée de Lie et les crochets de Lie sont compatibles avec la notion d'homogénéité.

Lemme C.1. *On a les résultats suivants :*

- a) *si les fonctions $h_1, h_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ sont homogènes de degrés d_1 et d_2 respectivement, par rapport à δ_ϵ^r , alors leur produit $h_1 h_2$ est homogène de degré $d_1 + d_2$ par rapport à δ_ϵ^r ;*
- b) *si $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ est homogène de degré d par rapport à la dilatation δ_ϵ^r , alors la dérivée partielle $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ de h par rapport à la i -ème coordonnée est homogène de degré $d - r_i$ par rapport à la dilatation δ_ϵ^r ;*
- c) *si $f_1, f_2 \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ sont homogènes de degrés d_1 et d_2 respectivement, par rapport à δ_ϵ^r , alors le crochet de Lie $[f_1, f_2]$ de f_1, f_2 est homogène de degré $d_1 + d_2$ par rapport à la dilatation δ_ϵ^r ;*
- d) *si $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ sont homogènes de degrés d_1 et d_2 respectivement, par rapport à la dilatation δ_ϵ^r , alors la dérivée de Lie $\mathcal{L}_f h$ de h le long du champ de vecteurs f est homogène de degré $d_1 + d_2$.*

Démonstration. a), b) sont donnés par la propriété 2 et c) par la propriété 1 dans [Hermès \(1991\)](#). Un calcul direct donne d) et e). \square

Exemple C.3. Considérons le champ de vecteurs f et la fonction h des exemples C.1 et C.2 respectivement. Alors la fonction $\mathcal{L}_f h(x_1, x_2) = 5x_1 x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2$ est homogène de degré $4 + 2 = 6$ par rapport aux poids $(r_1, r_2) = (2, 1)$. \diamond

BIBLIOGRAPHIE

- Andrieu, V. et Praly, L. : On the existence of a Kazantzis–Kravaris/Luenberger observer. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(2):432–456, 2006.
- Andrieu, V., Praly, L. et Astolfi, A. : Nonlinear output feedback design via domination and generalized weighted homogeneity. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 6391 –6396, 2006.
- Andrieu, V., Praly, L. et Astolfi, A. : Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(4):1814–1850, 2008.
- Andrieu, V., Praly, L. et Astolfi, A. : High gain observers with updated high-gain and homogeneous correction terms. *Automatica*, 45(2):422–428, Février 2009.
- Arnold, V. : *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Springer Verlag, New York, 1988.
- Azemi, A. et Yaz, E. : Sliding-mode adaptive observer approach to chaotic synchronization. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, 122:758–765, 2000.
- Back, J., Yu, K. T. et Seo, J. H. : Dynamic observer error linearization. *Automatica*, 42(12):2195 – 2200, 2006.
- Baras, J. S., Bensoussan, A. et James, M. R. : Dynamic observers as asymptotic limits of recursive filters : Special cases. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 48(5):1147–1158, 1988.
- Besaçon, G. : *Nonlinear Observers and Applications*. Springer Verlag / Heidelberg, New-York / Berlin, 2007.
- Besaçon, G. et Ticlea, A. : An immersion-based observer design for rank-observable nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(1):83–88, 2007.

- Bestle, D. et Zeitz, M. : Canonical form observer design for nonlinear time variable systems. *International Journal of Control*, 38(2):419–425, 1983.
- Bhat, S. P. et Bernstein, D. S. : Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(3):751–766, 2000.
- Bhat, S. P. et Bernstein, D. S. : Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 17:101–127, 2005.
- Bhat, S. et Bernstein, D. : Finite-time stability of homogeneous systems. *In Proceedings of the American Control Conference*, p. 2513–2514, Albuquerque, USA, 1997.
- Bianchini, R. M. et Stefani, G. : Graded approximations and controllability along a trajectory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 28(4):903–924, 1990.
- Bicchi, A., Christensen, H. et Prattichizzo, D. : *Control problems in robotics*, vol. 4 de *Springer tracts in advanced robotics*. Springer Berlin, Berlin / New-York / Paris, 2003.
- Birk, J. et Zeitz, M. : Extended Luenberger observers for nonlinear multivariable systems. *International Journal of Control*, 47:1823–1836, 1988.
- Bose, B. : *Power electronics and motor drives : advances and trends*. Elsevier, Upper Saddle River, 2006.
- Bossane, D., Rakotopara, D. et Gauthier, J. : Local and global immersion into linear systems up to output injection. *In Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 2000 –2004 vol.3, déc. 1989.
- Busawon, K. et de Leon-Morales, J. : An observer design for uniformly observable nonlinear systems. *International Journal of Control*, 73(15):1375–1381, 2000.
- Busawon, K., Farza, M. et Hammouri, H. : Observer design for a special class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 71(3):405–418, 1998.
- Busawon, K. et Saif, M. : A state observer for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(11):2098 –2103, novembre 1999.
- Ciccarella, G., Mora, M. D. et Germani, A. : A Luenberger observer for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 57(3):537–556, 1993.
- Țiclea, A. : *Techniques d’immersion pour l’estimation non linéaire, application aux systèmes de puissance*. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, 2006.
- Dalla Mora, M., Germani, A. et Manes, C. : Design of state observers from a drift-observability property. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8):1536 –1540, août 2000.

- Deza, F., Busvelle, E., Gauthier, J. P. et Rakotopara, D. : High gain estimation for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 18(4):295 – 299, 1992.
- Ding, X., Frank, P. M. et Guo, L. : Nonlinear observer design via an extended observer canonical form. *Systems & Control Letters*, 15(4):313 – 322, 1990.
- Drakunov, S. et Utkin, V. : Sliding mode observers. tutorial. *In Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, 1995.
- Engel, R. : Nonlinear observers for Lipschitz continuous systems with inputs. *International Journal of Control*, 80(4):495–508, 2007.
- Engel, R. et Kreisselmeier, G. : A continuous-time observer which converges in finite-time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(7):1202–1204, 2002.
- Engel, R. et Kreisselmeier, G. : Nonlinear approximate observers for feedback control. *Systems & Control Letters*, 56(3):230 – 235, 2007.
- Filippov, A. : *Differential equations with discontinuous right hand sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1988.
- Fliess, M. et Kupka, I. : A finiteness criterion for nonlinear input output differential systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21(5):721–728, 1983.
- Fossen, T. et Grovlen, A. : Nonlinear output feedback control of dynamically positioned ships using vectorial observer backstepping. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(1):121 –128, jan. 1998.
- Franck, P., Schrier, G. et Garcia, E. A. : Nonlinear observers for fault detection and isolation. *In* Nijmeijer, H. et Fossen, T., éds : *New directions in nonlinear observer design*, vol. 244 de *Lecture notes in control and information sciences*, p. 399–422. Springer, 1999.
- Gauthier, J. et Bornard, G. : Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4):922 – 926, août 1981.
- Gauthier, J., Hammouri, H. et Othman, S. : A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):875 –880, juin 1992.
- Glumineau, A., Moog, C. et Plestan, F. : New algebraic-geometric conditions for the linearization by input-output injection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(4):598 –603, avr. 1996.
- Goodman, R. : *Nilpotent Lie groups : structure and applications to analysis*, vol. 562 de *Lectures note in Math.* Springer-Verlag, Berlin / New-York, 1976.
- Guay, M. : Observer linearization by output-dependent time-scale transformations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(10):1730–1735, 2002.

- Haimo, V. : Finite time controllers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24(4):760–770, 1986.
- Hammouri, H. et Gauthier, J. : Global time-varying linearization up to output injection. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 30:1295–1310, 1992.
- Hammouri, H. et Kinnaert, M. : A new procedure for time-varying linearization up to output injection. *Systems & Control Letters*, 28:1551–157, 1996.
- Hammouri, H., Kinnaert, M. et El Yaagoubi, E. : Observer-based approach to fault detection and isolation for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(10):1879 –1884, oct. 1999.
- Hammouri, H., Targui, B. et Armanet, F. : High gain observer based on a triangular structure. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(6):497–518, 2002.
- Haskara, I., Ozguner, U. et Utkin, V. : On sliding mode observers via equivalent control approach. *International Journal of Control*, 71:1051–1067, 1998.
- Hermann, R. et Krener, A. : Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5):728 – 740, oct. 1977.
- Hermes, H. : Control systems which generate decomposable lie algebras. *Journal of Differential Equations*, 44(2):166 – 187, 1982.
- Hermes, H. : Nilpotent approximations of control systems and distributions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24(4):731–736, 1986.
- Hermes, H. : Nilpotent and high-order approximations of vector-field systems. *SIAM Review*, 33(2):238–264, 1991.
- Hong, Y. : Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems. *Systems & Control Letters*, 46(4):231 – 236, 2002.
- Hong, Y., Huang, J. et Xu, Y. : On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(2):305 –309, fév. 2001.
- Hou, M., Busawon, K. et Saif, M. : Observer design based on triangular form generated by injective map. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(7):1350 –1355, juil. 2000.
- Hou, M. et Pugh, A. C. : Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems. *Systems & Control Letters*, 37(1):1 – 9, 1999.
- Isidori, A. : *Nonlinear control systems*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1995.
- Jo, N. et Seo, J. : A state observer for nonlinear systems and its application to ball and beam system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5):968 –973, mai 2000.

- Jouan, P. : Immersion of nonlinear systems into linear systems modulo output injection. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(6):1756–1778, 2003.
- Kalman, R. et Bucy, R. : New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Ingeeneering*, 83:95–107, 1961.
- Kalman, R. : A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Ingeeneering*, 1960.
- Kazantsis, N., Kravaris, C. et Wright, R. : Nonlinear observer design for process monitoring. *Industrial & Engineering chemistry research*, 39(2):408–419, 2000.
- Kazantzis, N. et Kravaris, C. : Nonlinear observer design using Lyapunov’s auxiliary theorem. *Systems & Control Letters*, 34(5):241 – 247, 1998.
- Keller, H. : Nonlinear observer design by transformation into a generalized observer canonical form. *International Journal of Control*, 46:1915–1930, 1987.
- Khalil, H. : *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 3^eme éd., 2000.
- Kreisselmeier, G. et Engel, R. : Nonlinear observers for autonomous Lipschitz continuous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3):451–464, 2003.
- Krener, A. J. et Respondek, W. : Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(2):197–216, 1985.
- Krener, A. et Xiao, M. : *Nonlinear observer design for smooth systems*, chap. 10, p. 411–422. Taylor and Francis, 2006.
- Krener, A. : The convergence of the extended Kalman filter. In Rantzer, A. et Byrnes, C., eds : *Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization*, vol. 286 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, p. 173–182. Springer Berlin / Heidelberg, 2003.
- Krener, A. J. et Isidori, A. : Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 3(1):47 – 52, 1983.
- Krener, A. J. et Kang, W. : Locally convergent nonlinear observers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(1):155–177, 2003.
- Krener, A. J. et Xiao, M. : Observers for linearly unobservable nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 46(4):281 – 288, 2002.
- Krstić, M., Kanellakopoulos, I. et Kokotović, P. : *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & sons, New-York / Chichester / Brisbane, 1995.
- Lévine, J. et Marino, R. : Nonlinear systems immersion, observers and finite dimensional filters. *Systems & Control Letters*, 7:137–142, 1986.

- Li, C. et Tao, L. : Observing nonlinear systems time-variable systems through a canonical observer. *International Journal of Control*, 44(6):1703–1713, 1986.
- Li, J., Qian, C. et Frye, M. : A dual observer design for global output feedback stabilization of nonlinear systems with low-order and high-order nonlinearities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 16(9):441–463, 2008.
- Li, J. et Qian, C. : Global finite-time stabilization by dynamic output feedback for a class of continuous nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5):879 – 884, mai 2006.
- Liu, D., Zhang, H., Polycarpou, M., Alippi, C. et He, H. : *Advances in neural networks*, vol. 6677 de *Lecture notes in computer science*. Springer, Berlin, 2011.
- Luenberger, D. G. : Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2):74 –80, 1964.
- Lynch, A. et Bortoff, S. : Nonlinear observers with approximately linear error dynamics : the multivariable case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(6):927 –932, juin 2001.
- Lynch, A. F. et Bortoff, S. A. : Non-linear observer design by approximate error linearization. *Systems & Control Letters*, 32(3):161 – 172, 1997.
- Ménard, T., Moulay, E. et Perruquetti, W. : Global finite-time observers for non linear systems. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 6526 –6531, dec. 2009.
- Ménard, T., Moulay, E. et Perruquetti, W. : A global high-gain finite-time observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(6):1500 –1506, june 2010.
- Ménard, T., Moulay, E. et Perruquetti, W. : Homogeneous approximations for multi-output systems and local observability. In *IFAC World Congress*, 2011.
- Menini, L. et Tornambe, A. : Observer design via linear immersion for nonlinear systems homogeneous of degree 0. In *Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on*, p. 1484 –1489, 2008.
- Menold, P., Findeisen, R. et Allgöwer, F. : finite-time convergent observers for linear time varying systems. In *Proceedings of the 11th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2003a.
- Menold, P., Findeisen, R. et Allgöwer, F. : Finite time convergent observers for nonlinear systems. In *Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 6, p. 5673 – 5678 Vol.6, 2003b.
- Moulay, E. et Perruquetti, W. : Finite time stability of non linear systems. In *IEEE Conference on Decision and Control*, p. 3641–3646, Hawai, USA, 2003.

- Munkres, J. : *Topology*. Prentice & Hall, englewood cliffs / London, 2^eme édn, 1999.
- Nam, K. : An approximate nonlinear observer with polynomial coordinate transformation maps. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(4):522 –527, avr. 1997.
- Nicosia, S., Tomei, P. et Tornambé, A. : An approximate observer for a class of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 13(1):43 – 51, 1989.
- Nicosia, S., Tomei, P. et Tornambe, A. : Feedback control of elastic robots by pseudo-linearization techniques. *In Proceedings of the 25th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 25, p. 397 –402, 1986.
- Nijmeijer, H. et Mareels, I. : An observer looks at synchronization. *Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 44(10):882 –890, oct. 1997.
- Noh, D., Jo, N. et Seo, J. : Nonlinear observer design by dynamic observer error linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(10):1746 – 1753, 2004.
- Perruquetti, W., Floquet, T. et Moulay, E. : Finite-time observers : Application to secure communication. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(1):356 –360, 2008.
- Phelps, A. R. : On constructing nonlinear observers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(3):516–534, 1991.
- Plestan, F. et Glumineau, A. : Linearization by generalized input-output injection. *Systems & Control Letters*, 31:115–128, 1997.
- Plestan, F., Grizzle, J., Westervelt, E. et Abba, G. : Stable walking of a 7-dof biped robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(4):653–668, 2003.
- Poincaré, H. : *Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste*. Gauthier Villard, Paris, 1899, reedition 1987, A. Blanchard.
- Proychev, T. et Mishkov, R. : Transformation of nonlinear systems in observer canonical form with reduced dependency on derivatives of the input. *Automatica*, 29:495–498, 1993.
- Qian, C. et Li, J. : Global output feedback stabilization of upper-triangular nonlinear systems using a homogeneous domination approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 16:441–463, 2006.
- Qian, C. et Lin, W. : Recursive observer design, homogeneous approximation, and non-smooth output feedback stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(9):1457–1471, 2006.
- Qian, C. et Li, J. : Global finite-time stabilization by output feedback for planar systems without observable linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(6):885 – 890, 2005.

- Raghavan, S. et Hedrick, K. : Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 59(2):515–528, 1994.
- Rajamani, R. : Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3):397–401, mars 1998.
- Reif, K., Onnemann, F. et Unbehauen, R. : An ekf-based nonlinear observer with a prescribed degree of stability. *Automatica*, 34(9):1119–1123, 1998.
- Respondek, W., Pogromsky, A. et Nijmeijer, H. : Time scaling for observer design with linearizable error dynamics. *Automatica*, 40(2):277–285, 2004.
- Robertsson, A. et Johansson, R. : Observer backstepping for a class of nonminimum-phase systems. In *Proc. of the 38th IEEE CDC*, 1999.
- Rothschild, L. et Stein, E. : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. *Acta Mathematica*, 137:247–320, 1976.
- Sauvage, F., Guay, M. et Dochain, D. : Design of a nonlinear finite-time converging observer for a class of nonlinear systems. *Journal of Control Science and Engineering*, 2007:9, 2007.
- Shen, Y. et Xia, X. : Semi-global finite-time observers for nonlinear systems. *Automatica*, 44(12):3152–3156, 2008.
- Shen, Y. et Huang, Y. : Uniformly observable and globally Lipschitzian nonlinear systems admit global finite-time observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(11):2621–2625, 2009.
- Souleiman, I. et Glumineau, A. : Constructive transformation of nonlinear systems into a special state affine mimo form and nonlinear observers. In *7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 2007.
- Souleiman, I., Glumineau, A. et Schreier, G. : Direct transformation of nonlinear systems into state affine miso form for observer design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(12):2191–2196, 2003.
- Spivak, M. : *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. 1. Publish or Perish, inc., Houston, 3^eme édn, 2005.
- Stefani, G. : Polynomial approximations to control systems and local controllability. In *Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 24, p. 33–38, 1985.
- Sundarapandian, V. : Local observer design for nonlinear systems. *Mathematical and Computer Modelling*, 35:25–36, 2002.
- Sussmann, H. J. : A general theorem on local controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25(1):158–194, 1987.

- Tarbouriech, S., Abdallah, C. et Chiasson, J. : *Advances in communication control networks*, vol. 308 de *Lecture notes in control and information sciences*. Springer Berlin, Berlin, 2005.
- Teel, A. et Praly, L. : Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback. *Systems & Control Letters*, 22(5):313 – 325, 1994.
- Thau, F. : Observing the state of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 17(3):471–479, 1973.
- Tornambe, A. : High-gain observers for non-linear systems. *International Journal of systems science*, 23(9):1475–1489, 1992.
- Tsinias, J. : Observer design for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 13(2):135 – 142, 1989.
- Tsinias, J. : Further results on the observer design problem. *Systems & Control Letters*, 14(5):411 – 418, 1990.
- Xia, X. et Gao, W. : Nonlinear observer design by observer canonical form. *International Journal of Control*, 47(4):1081–1100, 1988.
- Xia, X. et Gao, W. : Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1:199–216, 1989.
- Yang, B. et Lin, W. : Homogeneous observers, iterative design, and global stabilization of high-order nonlinear systems by smooth output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(7):1069–1080, 2004.
- Zeitz, M. : The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 9:14–156, 1987.